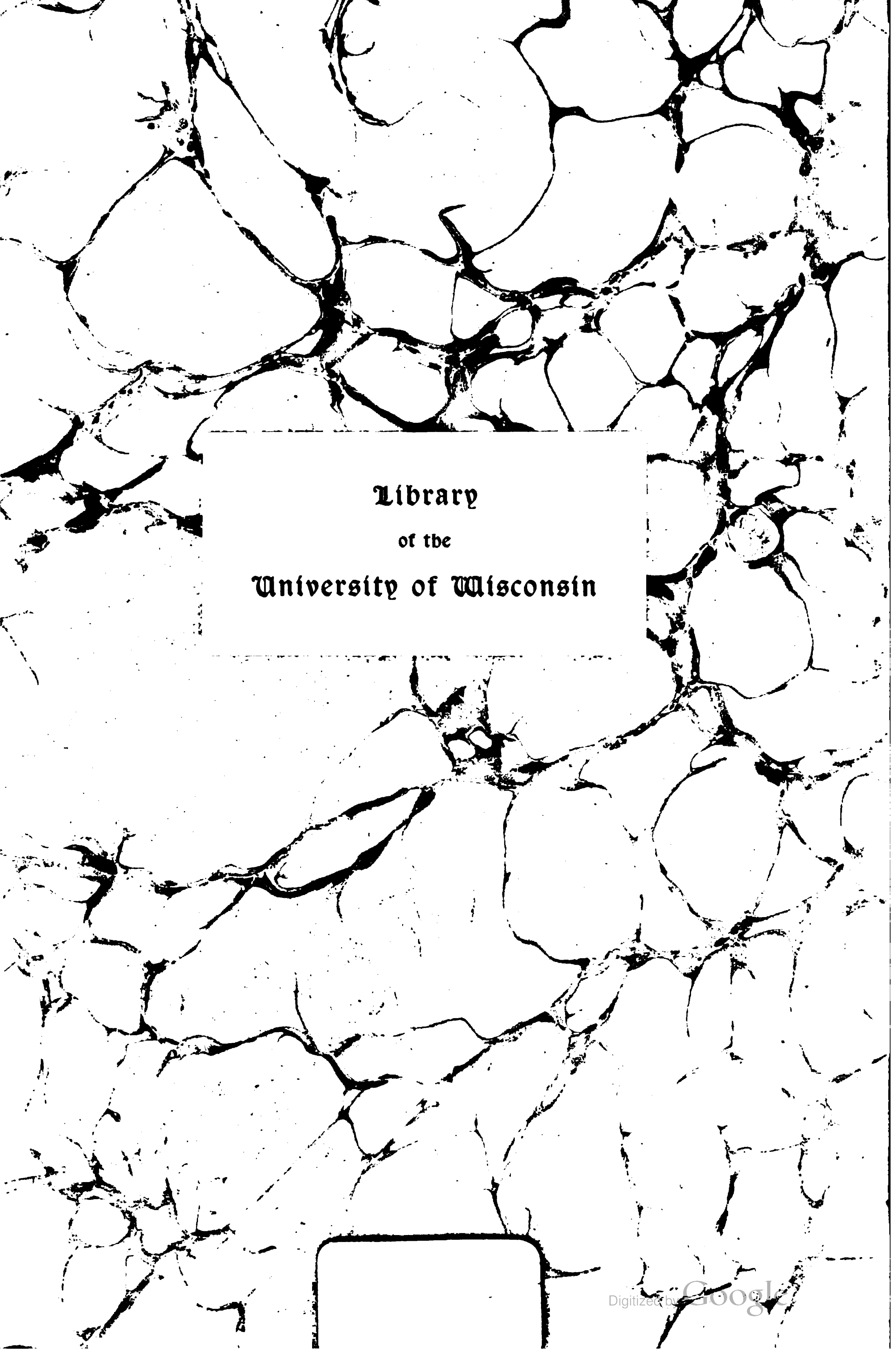
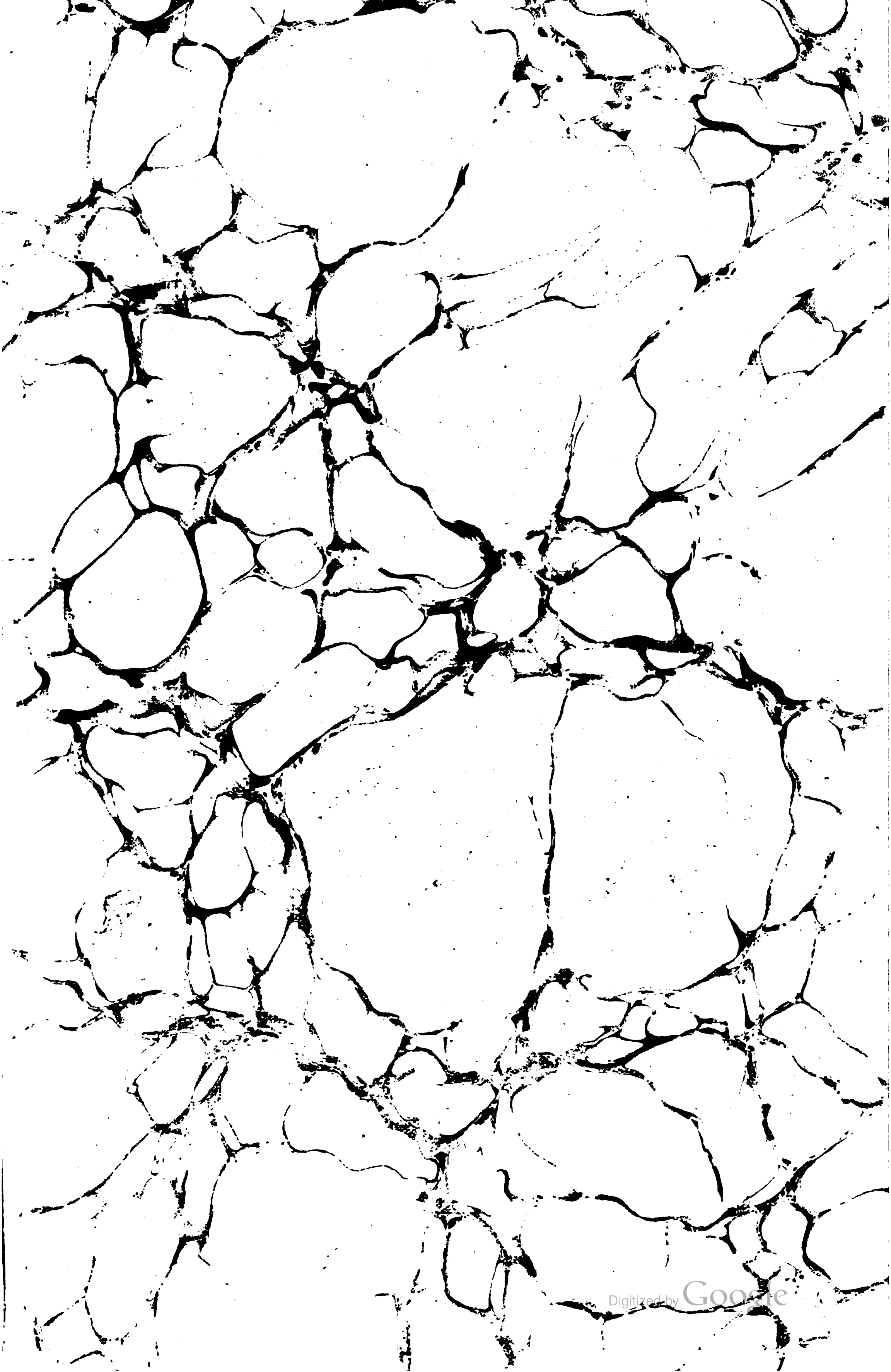

Library
of the
University of Wisconsin



ERRATA

Page	10, ligne	9,	*au lieu de*	$Q = 2\pi R_1 b_1 u_1 \sin \gamma_1$,	*lire*	$Q = 2\pi R_1 b_1 u_1 \sin \alpha_1$
—	19 —	12	—	$\rho X - \frac{dp}{ds} = J\rho_s$	—	$\rho X - \frac{dp}{ds} = \rho J_s$
—	23 —	23	—	$w_2^0 = u_2^0 + v_0^2$	—	$w_0^2 = u_0^2 + v_0^2$
—	71 —	14	—	h_a	—	h
—	84 —	6	—	de l'exposant $\frac{2}{1}$	—	$\frac{1}{2}$
—	88 —	9	—	$\frac{S_t}{S} \frac{0.0412}{0,0314} = 1,31$	—	$\frac{S_t}{S} = \frac{0.0412}{0,0314} = 1,31$
—	101 —	3	—	0,042	—	0,0462
—	101 —	9	—	R_3^5 — d'où : $R_0^5 =$	—	— d'où $R_3^5 - R_0^5 =$
—	115 —	1	—	$78,5^3$	—	$78,45^3$
—	129 —	7	—	$\rho = e\theta$	—	$\rho = e^\theta$
—	129 —	16	—	(Pl. IV)	—	(Pl. 3)
—	129 —	29	—	(*fig.* 20, Pl. V)	—	(*fig.* 20, Pl. 3)

ESSAI

SUR LES

POMPES CENTRIFUGES

TOURS. — IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES

ESSAI

SUR LES

POMPES CENTRIFUGES

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES

PAR

A.-H. COURTOIS

INGÉNIEUR

PARIS

Vve Ch. DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS NATIONAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES

49, Quai des Grands-Augustins, 49

1900

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DEUXIÈME PARTIE

Théorie, dite « Statique », des pompes centrifuges

TROISIÈME PARTIE

Recherches expérimentales sur le fonctionnement des pompes centrifuges

ESSAI SUR LES POMPES CENTRIFUGES

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES

PREMIÈRE PARTIE

1. Préambule. — Depuis plus d'un demi-siècle, les pompes centrifuges, dont chacun connaît les organes simples et le fonctionnement, sont, à cause de nombreux avantages, largement entrées dans la pratique courante. — Bien des savants distingués n'ont pas dédaigné de chercher à établir la théorie de ces pompes spéciales; laquelle théorie, à part la qualité physique des fluides propulsés, liquides ou quasi-liquides, peut être la même que celle des ventilateurs, dits à *force centrifuge*, qui agissent sur des gaz.

Les premiers essais de ce genre furent entrepris en France par M. Combes pour des ventilateurs de mines. — M. Combes s'appliqua à analyser les phénomènes hydrodynamiques du mouvement que prend dans le tambour mobile, c'est-à-dire dans l'organe opérateur de la machine, le fluide sollicité par l'aubage de ce dernier à s'évacuer du centre à la circonférence par mouvement de rotation. — Depuis la publication de ses savants mémoires (*Annales des Mines*, t. XV et XVIII, 1840) jusqu'à nos jours, et à quelques variantes près, le mode de M. Combes de poser les prémisses de cette théorie, et sa mise en équation, ont été adoptés, comme une sorte de *postulatum*, par la plupart des auteurs de tous les pays,

L'exposition de la doctrine, d'après ce postulatum, laisse parfois entrevoir, dans l'éblouissement des transformations algébriques, certaines relations fugitives qui pourraient être

d'accord avec quelques-uns des faits constants de la pratique; mais, en général, force est bien de le reconnaître, les formules auxquelles elle conduit vont constamment à l'encontre de toutes les données expérimentales. — Voilà pourquoi la théorie des machines centrifuges est toujours soumise à la controverse, et reste enveloppée dans un tourbillonnant et troublant mystère dont il n'est pas facile de déchirer le voile.

Au point de vue scientifique, d'ailleurs, cette question des machines centrifuges, sous une apparence modeste, prend une grande importance; elle intéresse tout l'arsenal de la mécanique physique appliquée aux fluides en général, et, dans l'état actuel des ressources de cette science, il n'est pas sûr que l'on puisse parvenir à la résoudre entièrement.

On peut se rendre compte combien ladite question est appréciée à sa valeur de difficultés, car, en cherchant dans les annales scientifiques de tous les pays, on trouverait, pour en avoir fait l'objet d'études particulières, plus de quarante auteurs autorisés qui ne sont pas toujours précisément d'accord entre eux.

2. Aperçu bibliographique. — Pour jalonner cette longue bibliographie (1), on peut par exemple, après M. Combes, citer par ordre de dates :

Wiesbach (1851-1860) : Le savant docteur allemand, bien connu par ses travaux dans le domaine de la mécanique appliquée, a, dès l'origine, donné une théorie des pompes centrifuges qui procède du postulat Combes et en comporte l'indétermination et l'insuffisance. Il est même à penser que, par sa grande autorité, cet auteur ait pu en induire d'autres à partager sa manière de voir à ce sujet.

Bresse (France, 1860) a établi une théorie procédant du postulat Combes. A vrai dire, M. Bresse n'a fait qu'une ébauche, il n'a pas beaucoup appuyé.

Général Morin (France, 1863) a établi des formules empiriques expérimentales qui ont rendu de bons services aux praticiens.

Rankine (Angleterre, 1868), théorie procédant du postulat Combes. — A introduit incidemment la notion du « free vortex », ou tourbillon libre.

(1) Bibliographie que nous empruntons, en grande partie, à un mémoire de M. Van der Stegen, dont il sera parlé plus loin.

Grove (Allemagne, 1869) procède du postulat Combes-Wiesbach.

Durand-Claye (France, 1873) procède du postulat Combes. Un des premiers a étudié et appliqué les pompes conjuguées.

Escher (Allemagne, 1876) procède du postulat Combes-Wiesbach. — Toutefois, relate des circonstances bien extraordinaires d'amorçage et de désamorçage des pompes.

Unwin (Angleterre, 1877-1878; *Minutes of Proceedings of C. E.*, vol. LIII) a fourni un mémoire étendu de grande allure scientifique, mais procédant du postulat Combes. — A signaler ses recherches à propos du sentier (*the path*), ou trajectoire de mouvement absolu, suivi dans l'espace par le liquide pour s'évacuer, quelle que soit la forme des aubes propulsantes, depuis son entrée jusqu'à sa sortie du tambour mobile.

Greindl-Poillon (1879) a publié à la Société des Ingénieurs civils de France une théorie, selon le postulat Combes, qui n'offre rien de particulier.

A.-H. Courtois: Moi-même j'ai publié, en 1881 (Dunod, édit.), une étude sur les machines centrifuges ayant pour point de départ théorique la notion du niveau statique établi par une pompe centrifuge pour chacun de ses nombres de tours. Cette notion me paraît rationnelle; elle permet de pousser à fond l'étude du fonctionnement des appareils, et elle conduit à la détermination de leurs éléments de construction, je n'ai pas changé d'opinion à ce sujet; mais je dois dire que, en l'émettant pour la première fois, j'ai un peu balbutié; car, enfin, je m'écartais trop du classique convenu pour ne pas être un peu hésitant.

Malheureusement aussi, j'ai, dans la même étude, perdu beaucoup de temps et pris beaucoup de peine à la poursuite d'une chimère, c'est-à-dire à la recherche de la forme rationnelle à donner aux aubes propulsantes des tambours mobiles; cette question de forme n'ayant qu'une importance bien relative, bien secondaire, ainsi que j'ai pu m'en convaincre par la suite.

De plus encore, sur la foi du dire expérimental ayant cours à cette époque, j'avais admis la proportionnalité du *caput mortuum*, dû aux frottements mécaniques et divers, à la puissance absorbée en chaque cas par un même appareil; c'est une erreur, sous le couvert de laquelle j'ai produit certains énoncés qui sont faussés par cela même. Dans ce qui va suivre, je vais essayer de remettre les choses mieux au point.

Hartmann (Allemagne, 1889) procède du postulat Combes-Wiesbach.

Bartl (Allemagne, 1892) procède comme le précédent.

Boulvin (Belgique, 1887-1889-1897), le distingué auteur d'un *Cours de Mécanique appliquée* très apprécié, s'est, comme on peut le voir par la succession des dates, beaucoup occupé des pompes centrifuges, mais toujours en procédant du postulat Combes. Par suite, il ne présente qu'une théorie indéterminée.

Van der Stegen (Belgique, 1893), disciple du précédent, dans un mémoire théorique sur les pompes centrifuges, a non seulement adopté le postulat Combes, mais y a ajouté, dans une massive compilation, des

à-côté historiques et scientifiques de grande allure, certes, dans lesquels on rencontre des questions de détermination de hauteurs statiques d'élévation, d'amorçage des pompes, de récupération de certaines énergies cinétiques à l'aide de diffusoirs ; des questions de *free vortex*, de *whirlpool*, et aussi la recherche de la forme rationnelle des aubages des tambours mobiles, etc. ; toutes questions qui, par la manière dont l'auteur les a traitées, ne laissent pas d'être bien inquiétantes, tant au point de vue des applications pratiques que de la vérité scientifique...

Buchetti (Paris, 1895) présente une théorie très tranchante, très sommaire, procédant toujours du postulat Combes. Bien que l'auteur prétende avoir fait une plus judicieuse application que d'autres du théorème de Bernoulli, il n'en arrive qu'à une théorie indéterminée, à la merci de coefficients empiriques. Il considère qu'une pompe centrifuge, machine opératoire, est une turbine centrifuge motrice renversée, et il semble vouloir tirer de ce rapprochement des analogies qui sont pour le moins discutables.

E. Marchand-Bey (Paris, 1895) a émis une théorie composite qui comporte de colossales énormités écolières. Néanmoins, le grand sens pratique de l'auteur lui donne bien quelque intuition.

M. Boulvin, enfin (Paris, 1897), reproduit dans la deuxième édition de son *Cours de mécanique appliquée*, la théorie des pompes centrifuges qu'il avait déjà présentée en 1887 et 1889, laquelle peut être considérée comme résumant la théorie classique, selon ce que, pour abréger, nous venons d'appeler le *postulat Combes*, et qui, actuellement encore, est généralement professée.

Pour les besoins de cette étude, et pour édifier le lecteur, je crois utile de faire un exposé de cette doctrine d'après les auteurs qui en relèvent, exposé dans lequel, pour tout condenser, j'insérerai, au fur et à mesure, les remarques et observations critiques qui pourront m'être suggérées, et qui seront, dans le développement qui va suivre, les seules choses qui me soient personnelles. De plus, j'admets que chacun connaît les appareils, ce qui me dispense d'en faire la description.

3. Théorie des pompes centrifuges d'après le postulat Combes. — Pour entrer en matière, les auteurs admettent que le phénomène du déplacement normal d'un liquide par une pompe centrifuge est régi par la loi de conti-

nuité, de permanence, du régime de l'écoulement dans toutes les sections de la desserte, tant à l'aspiration qu'au refoulement, et le problème général s'énonce :

Établir les éléments de construction et l'allure d'une pompe centrifuge, devant produire l'élévation et le débit continu d'un volume de liquide Q à une hauteur H.

La solution de ce problème a plus particulièrement pour but la détermination des dimensions du tambour mobile, organe opérateur, et celle du sectionnement et de la forme de son aubage.

Pour arriver à des formules propices à cet objet : dans la mise en équation, et parce qu'il est admis en théorie qu'on n'en saurait faire l'estimation, on fait abstraction de toutes les pertes de charge que ne laisse pas de produire la circulation dans les tuyaux et passages, quitte plus tard, pour la pratique, à les englober dans un coefficient d'incertitude variable à volonté. Puis, sous cette restriction, on suppose le problème résolu, et l'on étudie le mouvement d'un filet fluide sollicité par les aubes d'un tambour mobile. — On lui applique les théorèmes généraux de l'hydrodynamique : soit le théorème de Bernoulli, soit le principe des quantités de mouvement projetées, soit le théorème de l'effet du travail ou des forces vives ; et avec le secours de certaines relations trigonométriques, qui n'interviennent que comme artifices de calculs, on écrit une série d'équations, liées plus ou moins directement avec le petit nombre de quantités connues dont on dispose ; on cherche, par tous les moyens, à établir de ces équations un nombre suffisant, c'est-à-dire égal, si possible, au nombre d'inconnues à dégager, de manière à rendre le problème déterminé ; ce à quoi il ne semble pas qu'on arrive facilement.

Ainsi se crée la *théorie générale* qui s'applique à des pompes particulières, dites à *diffusoirs*, lesquelles, soi-disant, récupèrent non seulement le travail des pressions, mais aussi une certaine quantité d'énergie cinétique, c'est-à-dire du travail qui

est prétendument manifesté sous forme de force vive. — De cette théorie générale, les auteurs extraient une autre théorie approximative et incomplète, dite *élémentaire*, qui néglige la récupération de l'énergie cinétique dont il vient d'être parlé, et que l'on applique aux pompes centrifuges proprement dites, sans diffusoirs récupérateurs. La distinction s'apercevra mieux par la suite.

4. Commençons donc par l'exposé de la théorie générale :

Désignation des éléments. — On désignera (Voir *fig.* 1, 2 et 3, Pl. I), d'après les notations suivantes, par :

Q, — Le volume en mètres cubes par seconde, du liquide à élever et à évacuer en régime permanent. Il faut remarquer que, dans l'esprit du problème, ce volume ne saurait être qu'un désidératum et non une donnée ferme ;

Π, — Poids spécifique du liquide sur lequel la pompe opère. $\Pi = 1000$ kilogrammes pour l'eau ;

$H = h + h'$, — Hauteur effective d'élévation du volume Q. C'est une donnée ferme ;

h, — Hauteur d'aspiration du niveau d'aval au centre de la pompe ;
h', — Hauteur de refoulement au-dessus du même centre ;

Ha, — Hauteur $= 10^{m},33$, de la colonne d'eau correspondant à la pression atmosphérique ;

γ_1, — Angle que fera la tangente au dernier élément de l'aube propulsante *ab* (*fig.* 3), avec la tangente à la circonférence extérieure du tambour mobile. C'est une donnée que l'on peut considérer comme ferme ; on se réserve d'en fixer la valeur.

p_0, — Pression correspondant à la hauteur piézométrique qui doit exister à l'entrée de l'aubage du tambour mobile, la pompe fonctionnant (*fig.* 2). Dans les conditions du problème, c'est une inconnue à déterminer.

En général, la pression piézométrique unitaire P s'évalue en tonnes de 1000 kilogrammes par mètre carré de surface, sous 1 mètre de hauteur d'eau en charge, soit $P = 1$ mètre $\times 1^{m^2} \times 1000$ kilogrammes, c'est-à-dire la densité spécifique de l'eau ; d'où, pour une hauteur d'eau h, quelconque, on a $p = h \times 1000 \times 1$ mètre carré, par

mètre carré, et $p = h \times 1000 \times \frac{1^{m2}}{10.000^{cm2}}$, par centimètre carré, qui est l'unité divisionnaire à laquelle on rapporte le plus souvent les pressions.

Pour une colonne h_1, d'un liquide de densité d_1, autre que celle $d = 1$ de l'eau, l'équation physique, $h_1 d_1 = h$ d'eau $\times 1$ donne h_1 ou h en fonction l'une de l'autre. C'est ainsi qu'il faudra entendre dans ce qui va suivre ;

p_1. — Pression correspondant à la hauteur piézométrique sur la circonférence extérieure du tambour mobile, de même la pompe fonctionnant. C'est une inconnue à déterminer ;

v_0, — Vitesse circonférentielle à l'entrée de l'aubage, c'est-à-dire au diamètre intérieur des ouïes. C'est une inconnue à déterminer ;

v_1, — Vitesse circonférentielle extérieure du tambour mobile, c'est-à-dire au diamètre où cesse l'action des aubes. C'est une des inconnues principales à déterminer ;

u_0, — Vitesse absolue de l'eau à son entrée dans l'aubage sous l'attaque du premier élément. On admet généralement que cette vitesse, compensation faite pour toutes pertes de charge, obstruction d'orifices, contraction, etc., sera égale à la vitesse que l'on se donne, d'après des règles pratiques, pour la circulation de l'eau dans les tuyaux d'aspiration, dont le diamètre se détermine en fonction de cette vitesse pratique et du volume Q à débiter. On s'impose donc de préparer à cet effet, et par épure, les orifices d'entrée dans l'aubage du tambour mobile. C'est donc une donnée relativement déterminable et indépendamment ;

u_1, — Vitesse absolue de l'eau à sa sortie de l'aubage, là où cesse l'action du dernier élément. C'est une inconnue à déterminer ;

w_0, — Vitesse relative de l'eau à son entrée dans l'aubage sur le premier élément de l'aube à l'intérieur du tambour mobile. C'est une inconnue qui se déduit du parallélogramme des vitesses u_0 et v_0 prises en sens contraire selon la règle : c'est leur résultante ;

w_1, — Vitesse relative de l'eau à sa sortie de l'aubage sur le dernier élément ; elle est la résultante de u_1 et de v_1 prise en sens contraire : c'est une inconnue principale à déterminer ;

R_0, — Rayon intérieur au point d'attaque de l'aubage. — Ce rayon se détermine en même temps que u_0, par les raisons d'épure dont il a été parlé à son propos ;

R_1, — Rayon extérieur de l'aubage du tambour mobile ;

b_0, — Largeur de l'aubage à l'entrée, sur la circonférence des ouïes. — Cette largeur se détermine en même temps que R_0, à l'aide de Q, de u_0,

et de l'angle de direction α_0, que l'on voit sur la figure 3, ainsi que de certaines hypothèses faites sur cette direction ; hypothèses qui rendent cette détermination bien incertaine. Par suite, $2\pi R_0 b_0$ est la surface cylindrique de la section à l'entrée de l'aubage;

b_1, — Largeur de l'aubage à la circonférence extérieure. — C'est une inconnue que l'on détermine de préférence à l'aide de w_1 de Q et de l'angle γ_1 donné (*fig.* 3). Il s'ensuit que $2\pi R_1 b_1$ est la surface cylindrique de la section à la sortie de l'aubage ;

ω, — Vitesse angulaire de rotation. -- Connaissant v_1, c'est une inconnue que l'on pourra déterminer en même temps que R_1.

Ceci posé, et comme il a été dit, il s'agit, d'après le postulat, de trouver, en nombre, des équations déterminantes.

Il est bien à penser que ces équations ne pourront manquer d'avoir entre elles, malgré leurs liaisons, les caractères d'indépendance qu'ont, entre eux, les principes généraux dont elles vont émaner. L'ordre dans lequel on doit les établir est donc indifférent jusqu'à un certain point; nous allons conserver autant que possible le processus généralement adopté.

5. Évaluations du volume débité. — Le débit, toujours d'après le postulat, peut s'évaluer, à l'entrée et à la sortie du tambour mobile, soit en fonction de la vitesse relative d'une molécule fluide le long de l'aube, dans l'intérieur de la couronne annulaire ; soit en fonction de la vitesse absolue, mesurée suivant le chemin réel parcouru dans l'espace, par la même molécule s'évacuant du centre à la circonférence.

Par exemple, au centre du tambour mobile, la vitesse gouvernante absolue de l'eau u_0, à son arrivée dans l'aubage, est supposée dirigée, pour éviter les chocs, par des lames fixes fictives (*fig.* 3), *oa*, *on*, *op*, etc., faisant un angle α_0 avec la vitesse tangentielle d'entraînement de rotation générale $v_0 = \omega R_0$.

La section normale S_{nu_0}, sur la circonférence des ouïes, prêtée par l'aubage à cette vitesse absolue, est exprimée par :

$$S_{nu_0} = b_0 \Sigma am.$$

Dans le triangle *amn*, considéré à l'infiniment petit, l'angle *anm* est égal à α_0, et alors $am = \text{arc}\, an \times \sin\alpha_0$; d'où :

$$S_{nu0} = b_0 \Sigma am = b_0 \sin\alpha_0 \Sigma\, \text{arcs}\, an = 2\pi R_0 b_0 \sin\alpha_0.$$

Et le débit est visiblement exprimé par :

(1) $$Q = 2\pi R_0 b_0 u_0 \sin\alpha_0.$$

La vitesse w_0 est la résultante de la vitesse u_0 et de la vitesse d'entraînement v_0 prise en sens contraire. Par la considération du triangle $am'n$, et en raisonnant comme ci-dessus, on trouve pour la section normale à cette vitesse :

$$S_{nw0} = 2\pi R_0 b_0 \sin\gamma_0.$$

On déduit de là une seconde expression de Q :

(2) $$Q = 2\pi R_0 b_0 w_0 \sin\gamma_0.$$

De (1) et de (2) on peut aussi conclure :

$$u_0 \sin\alpha_0 = w_0 \sin\gamma_0.$$

Les relations (1) et (2) sont admises par tous les auteurs ; plus spécialement dans leur enseignement, MM. Tresca et Ser ont adopté l'équation (1) pour leurs déductions.

De même à la sortie de l'aubage sur la circonférence extérieure, le postulat admet que la vitesse relative w_1 est la résultante de la vitesse absolue u_1 et de la vitesse d'entraînement $v_1 = \omega R_1$, prise en sens contraire. On conclura comme ci-dessus la section S_{nw_1}, qui lui est normale :

$$S_{nw_1} = 2\pi R_1 b_1 \sin\gamma_1.$$

Et il s'ensuit une troisième expression de Q :

(3) $$Q = 2\pi R_1 b_1 w_1 \sin\gamma_1.$$

C'est cette dernière formule (3) que la plupart des auteurs, relevant du postulat, choisissent de préférence, parce qu'elle engage le facteur sin γ_1 que l'on se donne; facteur auquel ils font jouer un grand rôle, comme on verra.

Première Remarque. — Il y a une quatrième équation que l'on pourrait établir, et qu'aucun auteur n'a jamais mise en cause; c'est l'expression de Q en fonction de la vitesse absolue u_1, à la sortie du tambour mobile; c'est-à-dire l'expression similaire de (1) à l'entrée dans l'aubage :

(4) $$Q = 2\pi R_1 b_1 u_1 \sin \gamma_1.$$

D'ailleurs, d'une manière générale sur figure 3, épure n° 1, planche I, pour les diagonales, $bd_1 = u_1$, $bd_2 = u_2$, $bd_3 = u_3$, ..., $bd_n = u_n$, on a successivement :

(5) $u_1 \sin \alpha_1 = u_2 \sin \alpha_2 = u_3 \sin \alpha_3 = \ldots\ldots u_n \sin \alpha_n = w_1 \sin \gamma_1 =$ $v_{1r} \sin 90° = v_{1r} =$ la valeur que prendrait la vitesse d'évacuation si elle était radiale.

Cette expression (5) est l'*équation des égalités multiples* (1) qui, multipliées chacune par $2\pi R_1 b_1$, donneront des expressions équivalentes pour le même débit Q. Ainsi les valeurs de u_1, limitées sur la figure 3 à la ligne *sx*, multipliées chacune par le sinus de leur angle α correspondant, sont des produits égaux. La direction de u_1 peut donc, à volonté, prendre ses ébats en remplissant cette condition, dans tout le quadrant *sbc*. Il en est de même pour les vitesses relatives w_1 dans le quadrant *sbe'*.

En tout état de cause, il semblerait naturel, et même plus rationnel, d'exprimer la valeur de Q en fonction de la vitesse absolue u_1, réelle, effective, avec laquelle la molécule d'eau quitte la trajectoire absolue *qrt*, ou sentier d'Unwin (*Unwin's path*), fixe dans l'espace, qu'elle parcourt pour s'évacuer à l'extérieur, c'est-à-dire par l'expression (4) plutôt que par toute autre.

Sur la figure 3, l'épure représente les conditions assez ordinaires du fonctionnement d'une pompe centrifuge. Cette épure est dessinée conséquente avec elle-même; ainsi, pour $R_0 = 1/2\, R_1$, on a $v_0 = 1/2\, v_1$. Si l'on admet que les choses soient arrangées de manière à avoir $2\pi R_0 b_0 = 2\pi R_1 b_1$, c'est ce qu'on réalise d'ailleurs généralement par épure en bonne construction pratique, et que de plus on ait choisi $\gamma_0 = \gamma_1$ à l'entrée et à la sortie; d'après les égalités (2) et (3), $Q = 2\pi R_0 b_0 w_0 \sin \gamma_0 = 2\pi R_1 b_1 w_1 \sin \gamma_1$, on aura $w_0 = w_1$, et le parallélogramme *bcde* sera bien le conséquent de

(1) Ces égalités expriment une propriété des ordonnées d'une hyperbole équilatère rapportée à son axe non transverse, pris pour axe des abscisses, dont l'équation serait ici : $v_{1r}^2 + x^2 = y^2$.

afgk. On peut alors constater, sur cette épure, que la vitesse relative ne variant pas de w_0 à w_1, la vitesse absolue, au contraire, varie beaucoup de u_0 à u_1 : plus du simple au double, sur la figure, quand l'aube propulse par sa convexité, et plus du simple au triple quand cette même aube propulse par sa concavité (Voir *fig.* 3, épure n° 2).

L'épure des parallélogrammes de la figure 3 est, depuis M. Combes, adoptée par tous les auteurs indistinctement, comme la représentation graphique exacte de l'ensemble des phénomènes; elle est la caractéristique, l'essence même de son postulatum. Mais une telle entité, ainsi présentée, est-elle chose juste, vraie, rationnelle?...

Considérons la figure 4 (Pl. I) ; elle représente un siphon renversé de section uniforme ou variable, alimenté par le niveau d'eau invariable MN; il débite théoriquement un volume constant par la section *ab*, sous la hauteur h_r, avec une vitesse $v = \sqrt{2gh_r}$.

On peut donc appliquer à toute section du tuyautage de ce siphon le théorème de Bernoulli, lequel s'énonce ainsi :

Dans l'écoulement permanent d'un fluide, si l'on ne tient pas compte du frottement et des actions mutuelles, et si le volume écoulé est le même pour chaque section de passage, on obtient pour chacune de ces sections, en leur centre de gravité, une quantité constante en faisant la différence : entre la hauteur au-dessous d'un plan de comparaison, dit plan de charge, XY, d'une part, et la hauteur piézométrique représentative de la pression, plus la hauteur génératrice de la vitesse, d'autre part.

C'est ainsi que l'on a pour les sections *mn*, *m'n'*, *ab*, etc., sachant que $\frac{v^2}{2g} = h_r$,

$$z - \left(h + \frac{v^2}{2g}\right) = z' - \left(h' + \frac{v'^2}{2g}\right) = z_r - \left(o + \frac{v^2}{2g}\right) = \text{constante } c\,;$$

égalités dans lesquelles h et h' peuvent se remplacer par $\frac{p}{\Pi}$ et $\frac{p'}{\Pi}$, comme il est dit paragraphe 4.

Par convention, nous pouvons appeler *vitesse relative*, la vitesse $v = \sqrt{2gh_r}$.

Supposons un petit tube *mt*, muni d'un robinet d'interruption *r*, faisant communiquer en *m* la branche descendante du siphon avec un vase A, ce tube étant supposé assez petit pour que son débit n'influence pas sensiblement le mouvement général de circulation. — La section *ab* étant fermée, si nous ouvrons le robinet *r*, l'eau, comme chacun sait, s'échappera théoriquement dans le vase A, supposé vide d'eau, avec une vitesse absolue $V = \sqrt{2gH}$, et avec une autre vitesse absolue

$$V' = \sqrt{2g(H - h_r)} = \sqrt{2gh},$$

cette section *ab* étant ouverte et donnant son plein écoulement.

Supposons, dans cet état de circulation générale, que l'on remplisse progressivement d'eau le vase A ; aussitôt que l'orifice du petit tube *mt* sera couvert, la vitesse V' diminuera jusqu'à devenir égale à 0 quand le niveau OP sera atteint; puis elle changera de sens et entraînera l'eau de A dans le corps du siphon avec des vitesses croissantes, $v' = \sqrt{2g(h_r - e)}$, jusqu'à devenir $v = \sqrt{2gh_r}$, quand $e = 0$, c'est-à-dire quand le niveau dans A correspondra avec MN ; auquel cas l'eau dans le tube *mt* participera au mouvement général de circulation régi par le théorème de Bernoulli.

N'y a-t-il pas un rapprochement à faire entre les mouvements d'eau observés dans le précédent siphon, avec vitesses absolues et relative qui arrivent à s'équilibrer, et ce qui se passe dans la circulation générale bien sectionnée d'une pompe centrifuge? Autrement, d'après l'épure (*fig.* 3), les vitesses absolues u_1, u'_1, des parallélogrammes *bcde*, *b'c'd'e'*, peuvent-elles, à l'encontre des côtés w_1, w'_1, vitesses relatives, enfreindre la loi de Bernoulli, sachant, à n'en pas discuter, que, à l'échappement, la pression, dont la molécule du point *b* ou *b'* est environnée, est la même dans tous les sens ; cela, à cause du milieu incompressible et de la permanence du régime d'écoulement? Cette raison n'empêche-t-elle pas d'établir une distinction entre les valeurs de ces vitesses u_1 et w_1 ou u'_1 et w'_1 ?

Ne serait-ce pas plutôt, parce que le théorème de Bernoulli domine toutes autres considérations et gouverne tous les phénomènes, que, au lieu des vitesses d'évacuation, qualifiées l'une de vitesse relative, l'autre de vitesse absolue mises en cause par la théorie Combes, l'on ne devrait considérer qu'une seule valeur de vitesse, appelée *vitesse de régime* par exemple, suivant la trajectoire absolue d'évacuation, c'est-à-dire le Unwin's path ou sentier d'Unwin, qui, trouvant toujours dans l'équation des multiples égalités (5) le moyen de satisfaire au débit Q, serait celle-là même résultant de l'application du théorème de Bernoulli à la circulation générale ?

Cette notion des vitesses relative et absolue, qui sont composante et résultante d'un mouvement ultra-accéléré (Voir *Note I*, à la fin du mémoire), est très juste et très vraie pour le mouvement de molécules sollicitées isolément, indépendamment les unes des autres; mais un tel mouvement, dans de telles circonstances, est incompatible avec la réalisation d'un mouvement permanent d'écoulement, sous peine de créer des discontinuités de veines fluides, des manques d'équilibre hydrostatiques, que la loi de Bernoulli combattrait imperturbablement à l'aide de la pression atmosphérique extérieure.

En de telles conjectures, serait il paradoxal, serait-il téméraire de penser que les parallélogrammes de la figure 3 du postulat Combes ne sont pas des réalités mécaniques applicables au fonctionnement des pompes centrifuges, parce que ce fonctionnement est régi, réglementé par la seule loi de continuité dont le théorème de Bernoulli est l'expression ? Et que, d'autre part, vouloir prétendre récupérer l'excès d'énergie cinétique soi-disant accusée par les diagonales *bd*, *b'd'*, n'est qu'illusion et chimère ?

Ne serait-ce pas dans l'irréalité de ces parallélogrammes, adoptés par les auteurs, que se trouve, en partie, le secret du sophisme, de l'équivoque qui, depuis l'origine, plane sur la théorie Combes et ses dérivées?...

Restons-en là de cette première remarque, et continuons notre exposé.

6. 2° Application du principe des forces vives. — De ce qui précède, nous ne retenons jusqu'alors que la formule (3).

Pour avoir d'autres relations, on applique le théorème des forces vives ou de l'effet du travail à un élément de la masse fluide sollicitée par l'aubage du tambour mobile. Seulement, ici, on rencontre chez les auteurs une telle profusion, une telle confusion, pour cette application au cas considéré, qu'il est indispensable d'entrer dans des détails.

Tous sont d'accord pour faire porter ce principe sur l'accroissement, en mouvement permanent pendant le temps infiniment petit dt, de la force vive acquise par la masse d'eau contenue dans le tambour mobile; et ils rapportent cet accroissement aux seules vitesses relatives w_0 et w_1 des parallélogrammes classiques $bcde$, $b'c'd'e'$, de la figure 3.

Deuxième Remarque. — On peut se demander pourquoi n'avoir pas fait porter le principe en question sur les vitesses absolues u_0 et u_1 des mêmes parallélogrammes. Il y aurait là une vraie mine d'accroissement à exploiter. Aucun auteur n'en donne la raison. Passons.

Maintenant, pour estimer la masse fluide élémentaire qui traverse le tambour mobile : appelant a la section d'entrée et de sortie supposée la même; c'est ce qu'on réalise généralement dans la construction des appareils ; puis appelant V la vitesse de circulation qui convient au débit ; la masse mise en mouvement pendant le temps dt sera évidemment exprimée par $M = \frac{\Pi a V dt}{g} = \frac{\Pi Q dt}{g}$, en faisant $aV = Q =$ le volume débité pendant l'unité de temps.

Alors on obtient le premier membre de l'équation cherchée de la force vive, qui est d'après les formules de la mécanique :

$$1/2\, \frac{\Pi Q}{g} dt\,(w_1^2 - w_0^2)\,;$$

premier membre qui prend la valeur zéro pour $w_0 = w_1$; c'est le cas le plus fréquent.

Ce premier membre est d'ailleurs analogue à celui de l'équation générale des moteurs hydrauliques, machines motrices, où l'on considère le mouvement permanent d'une tranche liquide de l'amont à l'aval.

De même que pour lesdits moteurs hydrauliques, on égale ce premier membre à la somme algébrique des travaux élémentaires des forces simultanément agissantes pendant le temps dt. Dans le présent cas, ces forces sont la pesanteur, la pression atmosphérique, les pressions propres du liquide, la force d'inertie du mouvement d'entraînement, ou force centrifuge, et les résistances passives.

Dans le tambour mobile d'une pompe centrifuge à axe horizontal, on considère le travail de la pesanteur comme s'équilibrant par moitié positive et moitié négative ; son effet étant ainsi annulé, on passe outre.

Quant aux résistances passives de circulation et autres, comme il a été déjà dit, on les omet à cause de la difficulté que présente leur estimation ; c'est une petite concession que l'on s'accorde pour déblayer le terrain ; il n'en sera parlé que pour mémoire. Il reste donc seulement à faire les évaluations suivantes :

7. Évaluation des pressions à l'entrée et à la sortie du tambour mobile et évaluation du travail de ces pressions. — Puisque le mouvement est permanent, le théorème de Bernoulli est ici applicable : ce que l'on fait en considérant les vitesses absolues u_0 et u_1, comme vitesses d'écoulement (*fig.* 3). Alors, d'après les notations et les figures 1 et 2 (Pl. I), on doit avoir, en prenant le plan de charge ou de comparaison sur les niveaux d'amont, et en exprimant les pressions en hauteurs d'eau, pour l'homogénéité :

$$z_0 - \frac{p_0}{\Pi} - \frac{u_0^2}{2g} = \text{constante} = 0;$$

d'où :

$$p_0 = \Pi\left(z_0 - \frac{u_0^2}{2g}\right).$$

Mais sur la figure on a visiblement $z_0 = H_a - h$. Donc,

$$(a) \qquad p_0 = \Pi\left(H_a - h - \frac{u_0^2}{2g}\right).$$

Puis le travail de cette pression pendant le temps dt est le produit de l'effort par le chemin parcouru. Or a étant, comme ci-dessus, la surface des sections d'entrée et de sortie sur lesquelles s'exercent les pressions d'amont et d'aval, on aura l'effort total d'aval par le produit, $F = p_0 \times a$; et, toujours comme ci-dessus, V étant la vitesse qui convient au débit, le chemin parcouru pendant le temps dt sera $e = Vdt$. D'où l'on conclut le travail actif de la pression d'aval p_0 :

$$t_0 = Fe = p_0 aVdt = p_0 Qdt = \Pi Qdt\left(H_a - h - \frac{u_0^2}{2g}\right),$$

en remplaçant p_0 par sa valeur (a), et en faisant $aV = Q$ par unité de temps.

De même pour la pression p_1 à la sortie on aura :

$$z_1 - \frac{p_1}{\Pi} - \frac{u_1^2}{2g} = 0;$$

d'où :

$$p_1 = \Pi\left(z_1 - \frac{u_1^2}{2g}\right).$$

Et comme on lit sur la figure, $z_1 = H_a + h'$, on a aussi :

$$(b) \qquad p_1 = \Pi\left(H_a + h' - \frac{u_1^2}{2g}\right).$$

Le travail de cette pression, agissant en sens contraire du mouvement ascensionnel, sera affecté du signe moins, et pour

les mêmes raisons qui viennent d'être exposées, il aura pour expression :

$$t_1 = -p_1 a V dt = -p_1 Q dt = -\Pi Q dt \left(H_a + h' - \frac{u_1^2}{2g} \right).$$

Troisième Remarque. — On peut se demander pourquoi, dans cette application du théorème de Bernoulli, on s'est servi des vitesses absolues u_0 et u_1 en qualité de vitesses d'écoulement du débit, alors que, d'après les équations (2) et (3), cette qualité n'est attribuée qu'aux vitesses relatives w_0 ou w_1? Il y a là une antinomie dont on ne rencontre l'explication nulle part. Passons.

De ce qui précède, on extrait des équations déterminantes : ainsi en retranchant (*a*) de (*b*), on obtient après réduction, en faisant $h + h' = H$ = hauteur d'élévation totale réelle :

$$(6) \qquad \frac{p_1 - p_0}{\Pi} = H - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{u_0^2}{2g};$$

d'où l'on tire aussi :

$$(7) \qquad H = \frac{p_1 - p_0}{\Pi} + \frac{u_1^2 - u_0^2}{2g}.$$

Quatrième Remarque. — Selon le postulat Combes, l'équation (6) appartient à la théorie dite *générale* applicable aux pompes à diffusoirs, ou amortisseurs d'énergie cinétique (*fig.* 2 *bis*). Dans la théorie dite *élémentaire*, applicable aux pompes ordinaires, sans amortisseurs (*fig.* 2), dont nous avons parlé, et que nous allons exposer plus loin, cette équation (6) est privée du terme $\frac{u_1^2}{2g}$, exprimant l'énergie cinétique, parce que, pour ces pompes aux lieu et place de l'équation (*b*), $z_1 - \frac{p_1}{\Pi} - \frac{u_1^2}{2g} = 0$, on pose $z_1 - \frac{p_1}{\Pi} = 0$. Pourquoi? C'est dans les *Leçons de Mécanique appliquée* de M. Boulvin (2e édit., 7e fasc., 1897, pp. 117 et 128) que l'on trouve ces deux avatars, sans autre explication que, dans cette variété de pompes, on peut se permettre ce sacrifice. Cette raison n'est peut-être pas suffisante ; car, en bonne et saine économie mécanique, le sacrifice ainsi consenti est tellement grand, si l'on en croit ce qu'accusent les diagonales du postulatum, qu'il suffirait à lui seul pour faire rejeter à tout jamais l'emploi des pompes centrifuges. Passons.

Il reste encore à apprécier le travail de la force d'inertie d'entraînement ou force centrifuge, dont l'expression générale est, comme on sait, $F_c = \omega^2 R$.

Appliqué à la masse élémentaire $\frac{\Pi Q}{g}\,dt$, qui a préalablement parcouru l'espace rayonnant de R_0 à R_1 (*fig.* 2 et 3), le travail de cette force est donné, entre R_0 et R_1, par l'intégrale définie évidente :

$$t_c = \frac{\Pi Q}{g}\,dt\int_{R_0}^{R_1}\omega^2 R\,dR = \frac{\Pi Q dt}{g}\left(\frac{\omega^2 R_1^2 - \omega^2 R_0^2}{2}\right) = \frac{\Pi Q dt}{g}\left(\frac{v_1^2 - v_0^2}{2}\right),$$

en remarquant que ωR_0 et ωR_1 sont les vitesses circonférentielles correspondant aux rayons R_0 et R_1.

Équation complète des forces vives. — Alors on peut écrire maintenant l'équation complète du théorème des forces vives appliqué au débit élémentaire d'une pompe centrifuge, *machine opératoire ;* c'est :

$$1/2\,\frac{\Pi Q}{g}\,dt\,(w_1^2 - w_0^2) = t_0 + t_1 + t_c = p_0 Q dt - p_1 Q dt + \frac{\Pi Q dt}{g}\left(\frac{v_1^2 - v_0^2}{2}\right),$$

qui devient par la suppression du facteur commun Qdt, et après simplifications :

$$\text{(A)} \qquad \frac{w_1^2 - w_0^2}{2g} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} - \frac{p_1 - p_0}{\Pi},$$

équation de laquelle, en remplaçant $\frac{p_1 - p_0}{\Pi}$ par sa valeur tirée de (6), on obtient :

$$\text{(8)} \qquad \frac{w_1^2 - w_0^2}{2g} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} - H + \frac{u_1^2 - u_0^2}{2g},$$

de laquelle on tire encore :

(9) $$H = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} + \frac{u_1^2 - u_0^2}{2g} - \frac{w_1^2 - w_0^2}{2g}.$$

Ces deux dernières équations sont complètement indéterminées, engagées qu'elles sont entre toutes inconnues. Pour les éclairer, on a alors recours aux deux relations trigonométriques suivantes, fournies par les triangles des vitesses dans les parallélogrammes du postulatum (*fig.* 3), qui permettent de faire intervenir les angles γ_0 et γ_1 que l'on se réserve de choisir. Savoir :

$$u_1^2 = v_1^2 + w_1^2 - 2v_1w_1 \cos\gamma_1 \quad \text{et} \quad u_0^2 = v_0^2 + w_0^2 - 2v_0w_0 \cos\gamma_0.$$

En substituant ces valeurs de u_1^2 et u_0^2 dans l'équation (9), il vient :

$$2gH = v_1^2 - v_0^2 + v_1^2 + w_1^2 - 2v_1w_1 \cos\gamma_1 - v_0^2 - w_0^2 + 2v_0w_0 \cos\gamma_0 - w_1^2 + w_0^2;$$

ou en réduisant :

$$gH = v_1^2 - v_1w_1 \cos\gamma_1 - v_0^2 + v_0w_0 \cos\gamma_0,$$

ce qui peut s'écrire :

(10) $$gH = v_1(v_1 - w_1 \cos\gamma_1) - v_0(v_0 - w_0 \cos\gamma_0).$$

Les parenthèses du second membre de (10) sont les projections des vitesses u_1 et u_0, sur les vitesses circonférentielles d'entraînement correspondantes, projections désignées sur la figure 3 par u_{0c} et u_{1c}. Alors l'équation (10) s'écrit :

(11) $$gH = v_1u_{1c} - v_0u_{0c}.$$

Telle est la forme définitive que, d'après les auteurs et le postulat Combes, revêt l'équation fondamentale du fonctionne-

ment des pompes centrifuges. Ils l'ont exprimée en facteurs géométriques pour plus de clarté sans doute.

8. Autre manière de rechercher l'équation fondamentale (11). — Dans l'exposé que nous venons de faire, nous avons suivi des auteurs ayant usé d'arguments élémentaires; mais il s'en trouve, parmi eux, beaucoup d'autres qui ont employé des moyens démonstratifs plus élégants : des docteurs-professeurs Allemands, Anglais, certains Belges, etc.

Ces auteurs ont appliqué au filet fluide sollicité par l'aubage d'un tambour mobile l'équation analytique générale de l'hydrodynamique,

$$\rho X - \frac{dp}{ds} = J\rho_s. \qquad \text{(B)}$$

qui, sur un seul plan de projection (Voir *fig.* 3, épure n° 3, à part), exprime en chaque point i, de la trajectoire plane s, décrite par un filet fluide, l'équilibre des forces mouvantes en travail virtuel, projetées sur ladite trajectoire. On admet que les actions de ces forces sont soumises à la loi de permanence, c'est-à-dire que, en chaque point précis i, leurs actions restent égales à elles-mêmes sans varier dans la suite du temps qui s'écoule (Bresse, *Hydraulique*, 1879, p. 23) ; en un mot, c'est l'équation embryonnaire du théorème de Daniel Bernoulli.

Pour le cas actuel, les auteurs projettent ces forces sur la trajectoire du mouvement relatif, c'est-à-dire sur le profil de l'aube propulsante s. On peut estimer ces forces : d'abord, en négligeant l'action de la pesanteur, X est la projection sur s de la force d'inertie centrifuge d'entraînement ω^2R, agissant pendant l'espace infiniment petit ds ; son action mouvante, ramenée au point précis i, sera donc $\rho\,\frac{\omega^2R\,dR}{ds}$; expression dans laquelle ρ représente la densité particulière du fluide qui donne à cette densité de pouvoir être considérée comme

une variable analytique en un point déterminé (BRESSE, *Hydraulique*, 1879, p. 7) ; c'est le rapport de la masse contenue dans un volume infiniment petit dQ à ce volume même, c'est-à-dire $\rho = \frac{\Pi dQ}{g dQ} = \frac{\Pi}{g}$. Dans les fluides incompressibles cette densité équivaut à la masse spécifique unitaire $\rho = \frac{\Pi Q}{g}$, dans laquelle on fait $Q = 1$.

La pression P est la pression exercée, en sens contraire du mouvement, sur la surface de niveau concentrique qui contient le point i ; sa variation pendant le parcours infiniment petit ds, ramenée au point précis i, sera bien $\frac{dp}{ds}$.

Le second membre de l'équation (B), ρJ_s, exprime, projetée sur la trajectoire s, la force ou vertu accélératrice par laquelle se manifeste le mouvement d'écoulement ; c'est donc la résultante des deux précédentes. La valeur dynamique de J_s est donnée par l'expression analytique connue $J_s = \frac{dw}{dt}$.

Remplaçant alors dans l'équation de condition (B), on a :

$$\rho \omega^2 R \frac{dR}{ds} - \frac{dp}{ds} = \rho \frac{dw}{dt};$$

ce qui donne en transposant :

$$\rho \frac{ds}{dt} dw = \rho \omega^2 R dR - dp;$$

puis, remplaçant ρ par sa valeur $\frac{\Pi}{g}$, et remarquant que l'expression analytique $\frac{ds}{dt} = w$, on transforme et on a l'équation différentielle définitive :

$$\frac{1}{g} w dw = \frac{1}{g} \omega^2 R . dR - \frac{1}{\Pi} dp;$$

laquelle étant intégrée entre R_0 et R_1, qui comprennent les limites p_0 et p_1 et w_0 et w_1, donne :

$$\frac{w_1^2 - w_0^2}{2g} = \frac{\omega^2 R_1^2 - \omega^2 R_0^2}{2g} - \frac{p_1 - p_0}{\Pi};$$

mais $\omega^2 R_1^2 = v_1^2$ et $\omega^2 R_0^2 = v_0^2$; par suite, on peut écrire :

$$\frac{w_1^2 - w_0^2}{2g} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} - \frac{p_1 - p_0}{\Pi};$$

et l'on retombe sur l'équation (A), trouvée plus haut ; on en tire :

$$\text{(A')} \qquad \frac{p_1 - p_0}{\Pi} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} - \frac{w_1^2 - w_0^2}{2g}.$$

Remarquant maintenant que le premier membre de l'équation (A') exprime une somme de hauteurs de colonnes d'eau que l'on peut représenter par H, il vient alors :

$$\text{(C)} \qquad \frac{p_1 - p_0}{\Pi} = H = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} - \frac{w_1^2 - w_0^2}{2g},$$

au lieu de l'équation (9), ci-dessus.

Telle est l'expression bien générale que donne le calcul analytique. C'est le développement du théorème de Bernoulli qui, au lieu d'apercevoir deux vitesses dans le fluide, n'en voit qu'une. On peut remarquer, d'ailleurs, que ce même théorème se serait tout aussi bien développé avec les vitesses absolues u_0 et u_1, en projetant les forces mouvantes sur l'Unwin's path, ce qui, selon nous, aurait été, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, beaucoup plus rationnel, du moment que l'on admet la réalité graphiquement accusée de ces vitesses.

Quoi qu'il en soit, on devrait logiquement, ce semble, s'en

tenir rigoureusement à l'expression (A′), établie soit en w, soit en u ; mais cela ne fait pas le compte de nos auteurs ; car, indépendamment de cette loi, ils ont toujours présente la vision des cinétiques diagonales créées par les parallélogrammes du postulatum et le désir de les récupérer. Aussi que font-ils : ils disent que (Mémoire Van der Stegen, auteur cité, p. 194) « l'action des aubes n'a pas seulement pour effet de « changer la pression de l'eau ; elle lui communique également « une énergie cinétique, c'est-à-dire un accroissement de force « vive égal à $\frac{u_1^2 - u_0^2}{2g}$ » ; et, d'après cette simple déclaration, sans autre justification, ils ajoutent ce terme au second membre de l'équation (C).

Alors, en appelant H_l une certaine hauteur limite qui serait atteinte s'il n'y avait de perte d'énergie d'aucune sorte, on écrit hardiment :

$$H_l = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} - \frac{w_1^2 - w_0^2}{2g} + \frac{u_1^2 - u_0^2}{2g};$$

et nous voici retombés, termes pour termes, sur l'équation (9), précédente.

A partir de ce moment, on fait de même intervenir les deux relations trigonométriques en u_1^2 et u_0^2, et l'on retrouve l'équation (11), c'est-à-dire :

$$(11\ bis) \qquad gH_l = v_1 u_{1c} - v_0 u_{0c}.$$

Et voilà le mystère éclairci.

C'est avec cette relation (11), plutôt spéculative, qu'il s'agit de résoudre la pompe du problème initial (§ 3). En consultant les auteurs, on s'aperçoit que ce n'est point chose aisée, car il faut se mouvoir en pleine indétermination.

Cette équation fondamentale (11) a, paraît-il, été déjà posée par Wiesbach dès 1850 ; il y a donc un demi-siècle. Elle est

constamment retrouvée et acceptée avec allégresse par tous les auteurs, Allemands, Anglais, Belges, etc., jusqu'à nos jours, sans qu'aucun ait seulement signalé la fragilité des bases sur lesquelles elle repose. Comme le fatum antique, elle condense la vérité et l'erreur ; c'est probablement pourquoi les mêmes auteurs en ont, en la mutilant, extrait la théorie incomplète, dite *théorie élémentaire*, applicable aux pompes centrifuges sans diffusoirs. C'est cette théorie que nous allons maintenant exposer. Nous aurons occasion de revenir sur la théorie complète, dite *générale*.

9. Théorie élémentaire des pompes centrifuges. — Cette théorie, comme nous l'avons déjà indiqué dans notre quatrième remarque, repose sur la perte consentie de l'énergie cinétique des diagonales d'épure u_1^2 ou u'^2_2 ; c'est-à-dire que l'équation (6), ci-dessus, est amputée du terme négatif $\frac{u_1^2}{2g}$, et, de ce fait, devient, *ipso facto*, sans autre motif :

(12) $$\frac{p_1 - p_0}{\Pi} = H + \frac{u_0^2}{2g};$$

et de même l'équation (9) devient :

(13) $$2gH = v_1^2 - v_0^2 - u_0^2 - w_1^2 + w_0^2.$$

Puis on admet, pour la commodité et pour, soi-disant, éviter les chocs à l'entrée dans l'aubage, que u_0 est dirigée suivant le rayon ; c'est une condition, paraît-il, essentielle. Alors, on a, d'après l'épure à part n° 4 sur figure 3, $w_0^2 = u_0^2 + v_0^2$, et l'équation (13) devient, réductions faites, l'équation de condition :

(14) $$2gH = v_1^2 - w_1^2.$$

Enfin l'équation du volume débité reste l'équation (3) sous

la forme acceptée :

$$(3) \qquad Q = 2\pi R_1 b_1 w_1 \sin \gamma_1.$$

Cinquième Remarque. — D'après la manière dont les auteurs l'interprètent, cette équation (3) est quadruplement indéterminée, en ce sens qu'elle contient trois inconnues R_1, b_1 et w_1, et même quatre, car le volume Q ne saurait être une donnée ferme. En effet : en se reportant à la figure 1 (Pl. I), le tuyautage de refoulement est représenté terminé par un ajutage sans contraction, à section variable à volonté (Voir *fig.* 15, Pl. II). Supposons que le débit Q soit obtenu par une section $\Omega = 2\pi R_1 b_1 \sin \gamma_1$, prêtée par cet ajutage, et avec un nombre de tours déterminé N, de la pompe, par suite avec une vitesse w_1 relative à Ω et à Q. Si l'on maintient invariable le nombre de tours N de la pompe, sans rien changer à l'installation de sa desserte, et que l'on réduise la section Ω de l'ajutage à la valeur $\frac{\Omega}{2}$ par exemple, qu'adviendra-t-il de Q, qu'arrivera-t-il de w_1 dans l'aubage ? La présente théorie ne saurait le dire. De même dans un projet, si l'on se donne $\Omega = 2\pi R_1 b_1 \sin \gamma_1$, et que l'on se propose de débiter un volume Q, la même incertitude que ci-dessus règnera sur la valeur que prendra w_1 dans tous les cas. Il s'ensuit que Q ne peut jamais être qu'un désidératum, et, comme un désidératum n'est pas une réalité, c'est l'indétermination. Ce caractère n'avait pas échappé à M. Combes (*Annales des Mines*, t. XV, 1840, p. 223). Cette circonstance, on en conviendra, ajoute encore à l'équivoque de la théorie qui découle de son postulat. Passons.

Donc, pour cette théorie élémentaire, nous avons déjà les équations (12), (13), (14) et (3), qui comportent comme quantités connues une hauteur H et un volume désiré Q à élever, et comme inconnues les huit valeurs p_1, p_0, R_1, b_1, w_0, w_1, v_0, et v_1, et enfin l'angle γ_1, qu'il s'agit de choisir pour en obtenir, si possible, des équations déterminantes.

A cet effet, on a recours à l'expression bien aléatoire du rendement mécanique. Pour trouver ce rendement, on prend le rapport du travail utile effectué ΠQH au travail dépensé, en négligeant toutes les pertes de charge : frottements dans les tuyaux, dans le tambour, frottements de son disque dans l'eau, etc., et l'on ne considère que l'anéantissement de la vitesse absolue u_1 du parallélogramme Combes, qui, soi-disant, rencontre les parois de l'enveloppe sous un angle défavorable

et donne lieu à la perte de charge $\frac{u_1^2}{2g}$; alors on a finalement pour le coefficient d'utilisation U :

$$(15) \qquad U = \frac{H}{H + \frac{u_1^2}{2g}}.$$

Sixième Remarque. — Nous en demandons pardon au lecteur, il faut tomber dans les redites, et, malgré notre précédente quatrième remarque, insister à nouveau sur cette apparition de la cinétique $\frac{u_1^2}{2g}$, qui arrive ici à l'improviste, bien que l'on ait consenti à la négliger tout d'abord. On peut chercher dans les auteurs, on n'y trouvera nulle part, développée littéralement pour ce cas, la provenance de ce terme. D'où vient-il, quelle est sa filiation ? Est-ce un produit fourni par la force motrice ? Est-ce un gain gratuit dû à la force des choses ? Si l'origine de ce terme répond à la première interrogation, on n'a pas le droit de le passer sous silence dans la mise en équation de l'effet du travail ; et, si cette origine répond à la seconde interrogation, de négliger ce terme n'est pas une perte qu'on éprouve, c'est un manque de gagner. Dans les deux cas, son arrivée ici ressemble à une inconséquence. Passons.

Avec l'équation (15), pour trouver encore des équations déterminantes, on recherche les conditions du fonctionnement d'une pompe, susceptibles de rendre le coefficient U maximum, ce qui visiblement aura lieu quand on aura rendu u_1 minimum.

Pour cela, on a encore recours à la relation trigonométrique du triangle des vitesses (*fig*. 3) :

$$(f) \qquad u_1^2 = v_1^2 + w_1^2 - 2v_1w_1 \cos\gamma_1,$$

relation de laquelle on élimine w_1, en la combinant avec l'équation (14), ce qui donne, après réduction :

$$(g) \qquad u_1^2 = 2v_1^2 - 2gH - 2\sqrt{v_1^2 - 2gH} \times v_1 \cos\gamma_1 ;$$

et, comme on sait, le minimum de u_1 se trouvera en égalant à 0 la dérivée, par rapport à v_1, du deuxième membre de

l'équation (g). Cette dérivée devient, tous calculs faits, sous cette condition :

$$4v_1 - 2\sqrt{v_1^2 - 2gH} \times \cos\gamma_1 - \frac{2v_1 \cos\gamma_1 \times 2v_1}{2\sqrt{v_1^2 - 2gH}} = 0.$$

Après avoir multiplié par $\frac{\sqrt{v_1^2 - 2gH}}{2}$ et avoir élevé au carré pour faire disparaître les radicaux, on arrive d'abord à

$$v_1^4 (1 - \cos^2\gamma_1) - 2gHv_1^2 (1 - \cos^2\gamma_1) - g^2H^2 \cos^2\gamma_1 = 0 ;$$

puis arrangeant, réduisant, et parce que, d'après la formule trigonométrique connue, on a $\frac{\cos^2\gamma_1}{1 - \cos^2\gamma_1} = \text{cotg}^2\gamma_1$, il vient :

$$v_1^4 - 2gHv_1^2 - g^2H^2 \,\text{cotg}^2\gamma_1 = 0 ;$$

d'où l'on tire, en résolvant l'équation du quatrième degré en v_1 :

$$v_1^2 = gH \pm \sqrt{g^2H^2 + g^2H^2 \,\text{cotg}^2\gamma_1} = gH\left(1 \pm \sqrt{1 + \text{cotg}^2\gamma_1}\right) ;$$

comme le signe moins doit être écarté, et que, d'après la formule trigonométrique élémentaire, on a :

$$\pm\sqrt{1 + \text{cotg}^2\gamma_1} \times \sin\gamma_1 = \pm 1,$$

il s'ensuit que :

$$\sqrt{1 + \text{cotg}^2\gamma_1} = \frac{1}{\sin\gamma_1},$$

et on a la transformée :

$$(16) \qquad v_1^2 = gH\left(1 + \frac{1}{\sin\gamma_1}\right).$$

D'où, en substituant dans l'équation (14), on obtient :

$$(17) \qquad w_1^2 = gH\left(\frac{1}{\sin\gamma_1} - 1\right).$$

Remplaçant, dans (f), v_1^2 et w_1^2 par les valeurs ci-dessus, on arrive à la forme de l'équation qui rend u_1^2 minimum ; c'est-à-dire :

$$(h) \quad u_1^2 = v_1^2 + w_1^2 - 2v_1 w_1 \cos\gamma_1 = gH\left(\frac{2}{\sin\gamma_1} - 2\cos\gamma_1\sqrt{\frac{1}{\sin^2\gamma_1} - 1}\right)$$
$$= 2gH\left(\frac{1}{\sin\gamma_1} - \frac{\cos^2\gamma_1}{\sin\gamma_1}\right) = 2gH \times \sin\gamma_1.$$

Puis l'équation (3) du débit devient, en remplaçant w_1 par sa valeur tirée de (17) :

$$(3\ bis) \quad Q = 2\pi R_1 b_1 \sqrt{\frac{1}{\sin\gamma_1} - 1} \times \sin\gamma_1 \times \sqrt{gH}$$
$$= 2\pi R_1 b_1 \sqrt{\sin\gamma_1 (1 - \sin\gamma_1)} \times \sqrt{gH}.$$

Enfin l'équation de l'utilisation maximum prend la forme :

$$(15\ bis) \qquad U = \frac{H}{H + \frac{2gH\sin\gamma_1}{2g}} = \frac{1}{1 + \sin\gamma_1}.$$

Récapitulation. — La marche suivie pour l'exposé de cette théorie, qualifiée d'*élémentaire*, a donc conduit aux six relations ci-dessus, dites *équations déterminantes*, savoir :

$$(12) \quad \frac{p_1 - p_0}{\Pi} = H + \frac{u_0^2}{2g}, \qquad (14) \quad 2gH = v_1^2 - w_1^2,$$

$$(16) \quad v_1^2 = gH\left(1 + \frac{1}{\sin\gamma_1}\right), \qquad (17) \quad w_1^2 = gH\left(\frac{1}{\sin\gamma_1} - 1\right),$$

$$(3\ bis) \qquad Q = 2\pi R_1 b_1 \sqrt{\sin\gamma_1 (1 - \sin\gamma_1)} \times \sqrt{gH},$$

$$(15\ bis) \qquad U = \frac{1}{1 + \sin\gamma_1}.$$

De ces relations, on peut tirer bien des conséquences, selon les valeurs attribuées à l'angle γ_1 : par exemple, si l'on fait $\gamma_1 = 0$, on a $\sin\gamma_1 = 0$; alors l'équation (3 *bis*) donne :

$$Q = 2\pi R_1 b_1 \sqrt{0(1-0)} \times \sqrt{gH} = 0.$$

L'équation (16) donne :

$$v_1^2 = gH\left(1 + \frac{1}{0}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{v_1^2}{1+\frac{1}{0}} = gH, \quad \text{ou} \quad v_1^2 = \frac{gH}{0} = +\infty.$$

L'équation (17) donne :

$$w_1^2 = gH\left(\frac{1}{0} - 1\right), \quad \text{ou} \quad \frac{w_1^2}{\frac{1}{0}-1} = gH, \quad \text{ou} \quad w_1^2 = -\frac{gH}{0} = -\infty.$$

L'équation (15 *bis*) donne :

$$U = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Et l'on voit que l'ensemble de ces quatre résultats représente l'absurdité.

Maintenant, si l'on fait l'angle $\gamma_1 = 90°$, on a $\sin\gamma_1 = 1$, c'est le cas des aubes radiales, alors successivement : l'équation (3 *bis*) donne :

$$Q = 2\pi R_1 b_1 \sqrt{1(1-1)} \times \sqrt{gH} = 0.$$

L'équation (16) donne :

$$v_1^2 = gH(1+1) \quad \text{ou} \quad v_1^2 = 2gH.$$

L'équation (17) donne :

$$w_1^2 = gH(1-1) \quad \text{ou} \quad w_1^2 = 0.$$

L'équation (15 *bis*) donne :

$$U = \frac{1}{1+1} = 0{,}50.$$

Tous résultats absurdes, contradictoires, et surtout contredits par l'expérience.

En effet, l'expérience a prouvé, et prouve même tous les jours, que les pompes à aubes radiales débitent tout autant, sinon plus, et tout aussi bien que les pompes à aubes courbes propulsant, soit par leur convexité, soit par leur concavité, quels que soient les angles γ_0 et γ_1 de leurs éléments extrêmes ; et que le rendement U reste le même, toutes choses égales d'ailleurs.

Ainsi, si l'on en croyait les déductions ci-dessus, les ventilateurs Lambert (*fig.* 5, Pl. I) ne donneraient aucun débit. L'expérience prouve qu'ils débitent parfaitement et ont un bon rendement, en tournant soit dans un sens, soit dans l'autre.

Il y a plus, c'est que le tambour centrifuge, genre Lambert, pour pompes et ventilateurs, disposé comme figure 6 (Pl. I) fonctionne tout aussi bien que le tambour Lambert proprement dit ; pourtant il n'y a là ni premier ni dernier élément d'aubage, ni angles γ_0 ou γ_1, avec leurs sinus trigonométriques venant fermer ou ouvrir les orifices d'évacuation du tambour mobile. Alors que deviennent les savantes et transcendantes spéculations sur la forme des aubes et les grands bénéfices de rendement qui doivent en résulter ?... Cela se réduit si bien à néant que c'en est parfaitement désobligeant pour l'algèbre.

On voit donc que, avec cette théorie élémentaire, le problème des appareils centrifuges reste indéterminé. Il nous semble inutile de suivre plus longtemps les auteurs dans leurs efforts pour arriver à trouver les valeurs les plus convenables de l'angle γ_1 entre 20 et 45° (il y a de la marge), ni d'exposer les pénibles à peu près dont ils se servent pour déterminer d'une manière absolument incertaine, fantaisiste même, les diamètres

des tambours mobiles et leurs nombres de tours pour chaque hauteur d'élévation.

En résumé, dans notre opinion, malgré les grandes autorités scientifiques dont elle est étayée, et pour élastique qu'elle soit, une théorie conduisant aux contradictions exposées ci-dessus est une théorie qui doit être rejetée par les praticiens.

On peut néanmoins remarquer que le hasard des transformations algébriques a amené, pour le cas des aubes radiales, l'équation $v_1^2 = 2gH$, d'une forme juste, comme on le verra plus tard.

10. Reprise de la théorie dite générale. — Pour en revenir incidemment à la théorie dite générale, qui tient compte des cinétiques diagonales u_0 et u_1, elle se résume dans les relations suivantes :

$$(3) \qquad Q = 2\pi R_1 b_1 w_1 \sin\gamma_1,$$

toujours agrémentée, selon les cas et les besoins, de la relation trigonométrique (f) :

$$(6) \qquad \frac{p_1 - p_0}{\Pi} = H + \frac{u_0^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g},$$

$$(9) \qquad 2gH = v_1^2 - v_0^2 + u_1^2 - u_0^2 - w_1^2 + w_0^2,$$

et enfin l'équation (11) :

$$gH = v_1 u_{1v} - v_0 u_{0v},$$

qui n'est, d'ailleurs, d'aucun emploi pratique.

Ainsi qu'il a été déjà dit, la différence entre cette forme théorique et la théorie dite élémentaire ne porte que sur l'équation (9), dont le second membre comporte le terme $u_1^2 - u_0^2$ d'énergie cinétique, négligé dans l'équation simi-

laire (14) de la théorie élémentaire ; énergie qu'il s'agit ici de récupérer en partie ou en totalité.

A cet effet, les auteurs proposent diverses dispositions représentées par la figure 2 *bis*, le schéma parle de lui-même, nous n'entrerons pas dans plus de détails. Quelques constructeurs ont appliqué ces principes et prétendent être arrivés à des solutions satisfaisantes; nous n'y contredirons pas, tout en nous gardant de conseiller à personne de s'engager dans cette voie.

M. Boulvin, qui expose et explique le système (*Cours de Mécanique appliquée*, 7[e] fascicule, 1897, p. 130 et suivantes; E. Bernard, édit.), est aussi très circonspect pour en recommander l'application; mais son disciple, M. Van der Stegen, auteur cité qui fait autorité en Belgique, est plus affirmatif.

Ainsi, dans un paragraphe de sa théorie des pompes centrifuges intitulé : *Différents états d'équilibre* (p. 202), M. Van der Stegen s'occupe de la hauteur de colonne d'eau que peut soutenir une pompe centrifuge en mouvement, sans qu'il y ait débit, hauteur qu'il veut bien m'accuser d'avoir appelée autrefois « hauteur d'élévation statique ». M. Van der Stegen prétend que cette hauteur est « *évidemment* donnée par la formule

$$H = \frac{p_1 - p_0}{\Pi} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g};$$

« ce qui revient à exprimer que la différence de pression fait
« équilibre à la force centrifuge du liquide en mouvement:

$$p_1 - p_0 = \int m\omega^2 R dR,$$

« m étant la masse unitaire $\frac{\Pi}{g}$ »,

On peut déjà observer que la présence du terme $\frac{v_0^2}{2g}$ n'est pas d'une nécessité bien évidente dans cette formule, car il s'ensuivrait que cette hauteur statique dépendrait, dans une

certaine mesure, du diamètre des ouïes, ce qui est contraire à toutes les données expérimentales ; et, d'ailleurs, il saute aux yeux qu'il n'en peut rien être.

Ensuite l'auteur ajoute : « Pour une pompe donnée, il faut « une certaine vitesse de rotation déterminée pour réaliser la « hauteur d'élévation statique ; voyons maintenant ce qui se « produit quand on modifie cette vitesse, et pour cela distin- « guons encore les deux cas extrêmes », qu'il caractérise ainsi :

« Premier cas. — *L'accroissement de force vive correspondant « au gain de charge* $\frac{u_1^2 - u_0^2}{2g}$ *est perdu en remous.*

« L'équation (I) doit être appliquée » [c'est-à-dire notre équation (A'), ci-dessus] :

$$\text{(I)} \qquad \frac{p_1 - p_0}{\Pi} = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} - \frac{w_1^2 - w_0^2}{2g}. \text{ »}$$

Pour ce premier cas, nous ne suivrons pas l'auteur dans tout son développement ; nous n'en retiendrons que la conclusion finale, un peu inattendue, mais assez juste : « Quand la vitesse « de rotation correspond à la hauteur d'élévation statique (pro- « bablement aux environs d'un orifice béant), il y aura, dit-il, « pour cette vitesse de rotation, deux états d'équilibre éga- « lement réalisables. L'un correspond à l'équilibre d'une co- « lonne d'eau sans écoulement, l'autre à un certain débit « fourni à la même hauteur. Dans le premier cas, le travail « est nul ; dans le second, il acquiert une certaine valeur. »

Maintenant nous citons en entier (p. 205 et 206) :

« Second cas. — *L'accroissement de force vive est complète- « ment utilisé.*

« La hauteur d'élévation statique est toujours donnée par la « formule :

$$H = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g}.$$

« Mais sitôt qu'il y a un léger débit, *si faible soit-il*, il faut « appliquer l'équation (II) » [c'est-à-dire notre équation (11), à nous] :

$$\text{(II)} \qquad H = \frac{v_1 u_{1c} - v_0 u_{0c}}{g};$$

« or, si l'on remarque que pour des valeurs w_0 et w_1, très petites « v_0 et v_1 sont très sensiblement égaux à u_{0c} et u_{1c} (Voir *fig.* 3), « on obtient comme hauteur d'élévation théorique, au moment « où l'écoulement commence à se produire :

$$H = \frac{v_1^2 - v_0^2}{g},$$

« soit le double de la hauteur d'élévation statique.

« On a souvent vu une anomalie dans cette discontinuité qui « double *instantanément* la hauteur d'élévation au moment où « le mouvement de l'eau commence. Le fait n'a cependant rien « d'anormal, etc. » — Nous en passons, et des meilleures.

Eh bien ! voilà qui est autrement éblouissant que d'avoir trouvé le mouvement perpétuel !... Il ne s'agit plus ici du principe de la conservation de l'énergie, c'est de sa duplication. — Et, pour réaliser cet idéal radieux, qu'en coûte-t-il, que faut-il ?... Une perle liquide... une larme !... un rien !...

La voilà bien, la vraie récupération à faire !... Et comment à cet effet n'avoir pas recours aux diffusoirs *ad hoc* ?...

On rencontre des émaux de ce genre dans le mémoire de M. Van der Stegen, un brillant algébriste (A. Van der Stegen, *Annales de l'Association des Ingénieurs des Ecoles spéciales de Gand*, t. XVI, 3e livraison ; imprimerie Annoot-Braeckman, Ad. Hoste, succ., 1893). — C'est un ouvrage à lire, qui a le mérite littéraire, ce qui le rend d'autant plus séduisant, d'être très bien écrit. — On y trouvera développée tout au long la théorie des tourbillons libres ou forcés (*forced and free vortex*) de Rankine ou *whirlpool* de M. Unwin ; une longue et triomphante recherche de la forme rationnelle de l'aubage des tam-

bours centrifuges, et de longues dissertations sur l'emploi des diffusoirs récupérateurs. On arrivera aussi à pouvoir constater à quelles extrémités les meilleurs esprits mêmes peuvent parfois être entraînés, quand, partant de fausses prémisses, ils abandonnent le soin des solutions à l'élégante magie de l'Algèbre, déité abstraite remplie de candeur.

11. Conclusion. — Nous croyons inutile de pousser plus loin cet examen de la théorie des machines centrifuges selon le postulat Combes. Car, pour nous qui éprouvons des doutes sur le fait de la communication, au fluide sollicité par un tambour mobile, d'une énergie cinétique allant au-delà du strict nécessaire, il demeure entendu que plus longue discussion à ce sujet est désormais superflue et sans objet. — Enfin, pour terminer, nous pensons ne dépasser aucune limite permise, en empruntant à l'article *Résistance des fluides*, du vieil *Aide-Mémoire* de Tom-Richard où l'on trouve encore tant d'épis d'or à glaner, la critique qu'adressait, il y a près d'un siècle et demi, l'illustre d'Alembert aux géomètres de son temps, qui s'occupaient d'établir des théories dans cette branche de la science hydraulique : « S'il arrive, disait-il, que la question que « l'on veut examiner soit trop compliquée pour que tous « les éléments puissent entrer dans la comparaison analytique « qu'on veut en faire, on sépare les plus incommodes, on leur « en substitue d'autres moins gênants, mais aussi moins réels ; « — et on est tout étonné d'arriver, après un travail pénible, « à un résultat contredit par la nature ! Comme si, après « l'avoir déguisée, altérée ou tronquée, une combinaison « purement mécanique pouvait nous la rendre. »

Eh bien ! il semble que cette critique n'a pas eu de portée pour les auteurs des théories, selon le postulat Combes, dont nous venons de passer une revue ; — revue au cours de laquelle il a été donné de rencontrer tant de ces petites improbités scientifiques si bien stigmatisées par d'Alembert, qui en reste pour son prône dans le désert. — Il est même à craindre que de longtemps il en soit toujours ainsi.

DEUXIÈME PARTIE

THÉORIE DITE "STATIQUE" DES POMPES CENTRIFUGES

12. Préambule. — J'ai été incité à rédiger ce mémoire sur les pompes centrifuges, que j'avais, depuis longtemps déjà, laissées de côté, parce que, dans ces derniers temps, on m'avait posé le problème de l'application de ces pompes, non conjuguées, à de grandes hauteurs d'élévation pour de petits débits.

J'ai trouvé que ce problème était assez difficile à résoudre. Je lui ai consacré quelques loisirs que j'avais disponibles. Mes recherches donc, à ce sujet, m'ont conduit à scruter les théories existantes ; c'est là que j'ai fait des découvertes auxquelles je ne m'attendais pas ; il en est résulté d'abord l'étude du postulat Combes, qu'on vient de voir, et que j'ai exposée à dessein, afin d'en comparer les résultats avec ceux d'une théorie qui m'est plus personnelle, et que j'appellerai, si l'on veut, *théorie statique des pompes centrifuges*, pour la différencier des autres. On sera dès lors à même d'asseoir un jugement sur la valeur propre de ces théories diverses, et d'établir la part de vérités et d'erreurs que chacune d'elles peut comporter.

Quant au problème dont il vient d'être parlé, il est, je crois, susceptible de solutions heureuses et convenables, maintenant que les grandes vitesses de rotations sont rendues possibles par l'emploi des dynamos et des turbines de Laval. Mais, dans

tous les cas, j'ai pu me convaincre de l'impuissance du postulat Combes à ce sujet. Il faut trouver autre chose.

A cet effet, je reprendrai, en complétant autant que possible, l'étude que j'ai publiée en 1881 (Dunod, éditeur), pour la rechèrche d'une théorie des machines centrifuges, basée sur la détermination du niveau d'élévation statique qu'établit, pour chacun de ses nombres de tour, soit un tambour mobile de pompe refoulant dans un tuyau vertical indéfini, soit un tambour mobile de ventilateur soufflant en réservoir clos. Cette première étude m'a valu autrefois d'assez nombreuses critiques : les unes justes et méritées ; mais d'autres n'ont pu ébranler ma conviction que la théorie des machines centrifuges ainsi présentée donne l'explication exacte de la plupart des phénomènes, je ne dis pas de tous.

J'en reste le protagoniste.

Je vais donc procéder comme j'ai déjà fait, c'est-à-dire envisager la question des pompes centrifuges, considérées comme engins particuliers, spéciaux, sans chercher à généraliser, et en écartant toute réminiscence, toute tendance de rapprochement entre ces machines opératoires et les turbines motrices, avec lesquelles, selon moi, l'analogie apparente est très lointaine au point de vue du fonctionnement. Car l'eau dans une turbine donne de la force motrice ; dans une pompe centrifuge elle en reçoit ; et, entre donner et recevoir, la différence ne laisse pas que d'être grande ; on peut disserter là-dessus à perte de vue.

Arrêtons le préambule et entrons en matière :

13. Décomposition du travail total dépensé par une pompe centrifuge. — L'élévation en régime d'écoulement permanent d'un poids d'eau $P = 1000\ Q$ à une hauteur effective H, par une pompe centrifuge, est un phénomène très complexe qu'il y a lieu de bien exposer. Car, en dehors du travail industriel utile recueilli, il y a des pertes de travail ou d'énergie inhérentes à ce phénomène lui-même, qui l'accompagnent dans sa manifestation. Ces diverses causes d'ab-

sorption d'énergie, qu'il faut particulièrement préciser, sont les suivantes :

1° T_u, — Le travail utile recueilli, que l'on désignera par T_u ;

2° t_e, — Le travail relatif à la vitesse emportée par l'eau en s'évacuant, ou, autrement dit, le travail dû à l'entretien du mouvement de l'eau dans les tuyaux de refoulement, et qui, par le fait, ne devrait pas être séparé du travail utile : on le désignera par t_e, abréviation de travail d'évacuation ou d'écoulement au dehors ;

3° t_{va}, — Le travail perdu par l'anéantissement de tout ou partie de la vitesse de l'eau dans les tuyaux d'aspiration à l'entrée dans le tambour mobile, pour cause de changement tumultueux de direction : on le désignera par t_{va}, travail, vitesse, aspiration ;

4° t_a, — Le travail perdu, dû au frottement de l'eau dans les tuyaux droits à l'aspiration d'après leur diamètre : on le désignera par t_a, travail, tuyaux d'aspiration ;

5° t_r, — Le travail perdu, dû au frottement de l'eau dans les tuyaux droits au refoulement d'après leur diamètre : on le désignera par t_r, travail, tuyaux de refoulement ;

6° t_t, — Le travail perdu, dû au frottement de l'eau dans les petits canaux de l'aubage du tambour mobile : on le désignera par t_t, travail, tambour mobile ;

7° t_{ca}, — Le travail perdu, dû à la résistance, à la circulation, des coudes à l'aspiration d'après leur diamètre : on le désignera par t_{ca}, travail, coudes, aspiration ;

8° t_{cr}, — Le travail perdu, dû à la résistance, à la circulation, des coudes au refoulement d'après leur diamètre : on le désignera par t_{cr}, travail, coudes, refoulement ;

9° t_{cs}, — Le travail perdu, dû au coude-enveloppe du tambour mobile, dont on appréciera les éléments d'après le plan de la pompe : on le désignera par t_{cs}, travail, coude, spirale ;

10° t_{dc}, — Le travail perdu, dû à la résistance provoquée par des difficultés de circulation de toutes sortes, tant à l'aspiration qu'au refoulement, englobant les pertes dues aux contractions, aux tumultes des divers passages irréguliers par suite de défauts dans le montage des tuyauteries, etc. : on le désignera par t_{dc}, travail, difficultés de circulation. — Dans chaque cas particulier, ce dernier travail ne pourra guère être estimé d'une manière rigoureuse qu'après une première expérience en vérification, ce qui devient alors facile ;

Le travail absorbé par la rotation propre du tambour mobile dans l'eau et les frottements particuliers qui en résultent, peut se décomposer comme suit :

11° f_t, — Le travail absorbé par le frottement de la surface périphérique se désignera par f_t.

12° f_t', — Le travail absorbé par le frottement des joues latérales se désignera par f_t'.

} Frottements du tambour mobile.

Ces deux dernières pertes de travail, comme on verra, prennent une importance prépondérante aux grandes hauteurs d'élévation.

13° f_m, — Le travail absorbé par les frottements mécaniques proprement dits, paliers, presse-étoupes, etc., se désignera par f_m, frottements mécaniques.

14. Équations de condition. — Réunissant tous les termes qui viennent d'être spécifiés, et en désignant par T_r le travail total réel dépensé, on pose la première équation de condition suivante :

$$(1) \quad T_r = \overset{1}{T_u} + \overset{2}{t_e} + \overset{3}{t_{va}} + \overset{4}{t_a} + \overset{5}{t_r} + \overset{6}{t_t} + \overset{7}{t_{ca}} + \overset{8}{t_{cr}} + \overset{9}{t_{cs}} + \overset{10}{t_{dc}} + \overset{11}{f_t} + \overset{12}{f_t'} + \overset{13}{f_m},$$

équation dont chaque terme représente le produit d'un même poids d'eau, P = 1000 Q, par une hauteur relative à chacun de ces produits, et qui, par suite, peut s'écrire terme pour terme avec ce transformant :

$$(2) \quad T_r = P(\overset{1}{H} + \overset{2}{h_e} + \overset{3}{h_{va}} + \overset{4}{h_a} + \overset{5}{h_r} + \overset{6}{h_t} + \overset{7}{h_{ca}} + \overset{8}{h_{cr}} + \overset{9}{h_{cs}} + \overset{10}{h_{dc}}) + \overset{11}{f_t} + \overset{12}{f_t'} + \overset{13}{f_m}.$$

Cette manière de poser les équations (1) et (2), en nombre de termes numérotés, se justifie par cette raison que, dans une évaluation d'étude, même inexactement faite, ces termes étant calculés à leur rang, on pourra plus aisément, après expérience, diriger les investigations et voir où l'on aura péché soit par excès, soit par défaut.

Des calculs de ce genre, malgré leur longueur plus apparente que réelle, ne sont jamais inutiles. Ils fournissent l'occasion de passer la revue générale d'une installation existante ou projetée, et peuvent ainsi éviter des mécomptes d'imprévu.

Il est donc essentiel d'établir, pour chaque terme de l'équation (2) de condition, des formules faciles à appliquer. Il est préférable, avant même d'aller plus loin, de procéder tout d'abord à cet établissement. En se familiarisant ainsi avec la recherche de ces formules, le lecteur en saisira mieux l'importance majeure.

15. Établissement de formules pour le calcul des termes de l'équation de condition (2). — Revenons donc à l'équation (2) : la valeur des hauteurs entre parenthèses du second membre s'obtient directement, dans tous les cas, des données d'un projet ou des résultats d'une expérience pour le 1er, le 2e et le 3e terme. Ainsi :

1er terme $H = h + h'$ (Voir *fig.* 1, Pl. I).

Ce premier terme est la donnée directe principale; c'est la hauteur réelle d'élévation, aspiration et refoulement compris.

Deuxième terme h_e. — Ce terme est la hauteur génératrice de la vitesse V, que prend l'eau pour s'écouler dans la plus petite section qui se rencontre dans le tuyautage de refoulement, jusques et y compris la section, mesurée normalement aux faces propulsantes, des canaux d'aubage du tambour mobile. En appelant S cette section, et connaissant le débit, on aura $V = \frac{Q}{S}$, et on posera par conséquent :

$$2^e \text{ terme } h_e = \frac{V^2}{2g}.$$

Troisième terme h_{va}. — A l'aspiration, quand l'eau affluente pénètre plus ou moins tumultueusement, par les ouïes, dans l'aubage du tambour mobile, il y a certainement une perte dans la vitesse que possède l'eau par le changement de direction à angle droit, et par suite une perte de force vive qui ne doit pas être passée sous silence. Cette perte peut, d'ailleurs, être variable avec des appareils différents. En bonne pratique, on peut, sans grandes chances d'erreur, estimer ce travail perdu à la moitié du précédent ; c'est une bonne moyenne que l'on peut accepter. On posera donc :

$$3^e \text{ terme } h_{va} = 1/2 \frac{V^2}{2g}.$$

Quant aux termes suivants, on ne peut les obtenir qu'à l'aide de formules les mieux appropriées de la mécanique appliquée : il s'agit de choisir.

Formules à appliquer aux 4ᵉ, 5ᵉ et 6ᵉ termes. — Pour les 4ᵉ, 5ᵉ et 6ᵉ termes, facteurs de la résistance qu'oppose, à sa circulation, le frottement de l'eau dans les tuyaux droits, la formule qu'il est convenable d'appliquer est celle de Darcy, à la fois théorique et expérimentale, qui a la sanction de la pratique. Vu son importance pour notre objet et pour des conséquences qu'il en faudra tirer, il est nécessaire d'entrer dans quelques détails à son sujet.

Rappel de la formule de Darcy. — Sans exposer ici une genèse que l'on trouvera si magistralement développée dans les ouvrages de nos grands maîtres, les Belanger, les Résal, les Bresse, rappelons que cette formule de Darcy est un résumé, mis à la portée des praticiens, du résultat de ses propres travaux et de ceux d'illustres hydrauliciens, tels que Dubuat, Navier, de Prony, Etelwein, d'Aubuisson, Bazin, etc.

Les plus anciens théoriciens ont émis l'opinion que la résistance de frottement dont il s'agit est une fonction de la vitesse du fluide en mouvement. Analytiquement ils l'avaient rapportée aux vitesses des filets fluides qui glissent le long des parois des tuyaux et sur eux-mêmes, de la circonférence au centre, à la façon de tubes télescopiques (Voir *fig.* 7, Pl. II).

L'observation montre, en effet, que ces vitesses sont variables, en diminuant du centre à la circonférence, suivant des lois incertaines et confuses,

qui ne se prêtent d'ailleurs guère au calcul (Bresse, *Hydraulique*, 1879, p. 225). Dans cet ordre d'idées, ils avaient basé leurs spéculations théoriques sur une fonction F (W), de la vitesse aux parois des tuyaux seulement.

De Prony et, après lui, Darcy, ont remplacé, dans cette méthode très rationnelle, la fonction F(W) de la vitesse aux parois, difficile à obtenir même expérimentalement, par la fonction F(V) d'une vitesse moyenne globale, quotient du volume fluide Q, qui s'écoule à la seconde, par la section S du tuyau dont le diamètre est D; c'est-à-dire par

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{1/4\,\pi D^2},$$

cette vitesse moyenne V étant facile à déterminer en chaque cas.

Remarquant maintenant que si, pour une longueur L de tuyau, on représente par ζ une différence de colonne piézométrique de A à B (*fig.* 7), qui serait relative à la seule résistance de frottement qu'opposent à la circulation de l'eau, par vertu spéciale, les parois du tuyau de diamètre D; la densité spécifique du fluide étant Π, la pression hydrostatique par unité de surface, correspondant à ζ, qui s'exerce dans tous les sens, sera :

$$p = \Pi\zeta \qquad (\S\ 4,\ 1^{\text{re}}\ \text{partie}),$$

laquelle, étant appliquée à la section droite du tuyau, donnera, pour sa longueur L, la force ou résistance totale R, au mouvement, due à cette cause qui contribue à assurer la permanence du régime d'écoulement. On écrira donc :

$$R = \frac{\pi D^2}{4} \times \Pi\zeta.$$

Cette résistance totale peut aussi être exprimée sous la forme suivante, qu'ont été amenés à lui préciser les hydrauliciens, c'est-à-dire par une expression particulière du frottement en fonction de la vitesse de circulation F(W) aux parois, qui s'exerce sur toute la surface mouillée πDL de la tranche de tuyau de longueur L comportant la différence piézométrique ζ; on pose donc l'équation :

$$R = \pi DL \times F(W).$$

Il s'ensuit qu'on peut écrire :

$$\text{(3)} \qquad \frac{\pi D^2}{4} \times \Pi\zeta = \pi DL \times F(W);$$

d'où l'on tire :

$$\text{(4)} \qquad \frac{\Pi D\zeta}{4L} = F(W).$$

Si dans cette dernière équation on représente $\frac{\zeta}{L}$ par J, c'est-à-dire la perte de charge, due au seul frottement, par mètre de longueur du tuyau considéré, et que l'on remplace, comme il est dit, F(W) par une fonction de la vitesse moyenne F (V), il vient :

(5) $$\frac{\Pi DJ}{4} = F(V).$$

De Prony, par la discussion d'expériences de Dubuat, Bossut et Couplet, a, le premier, assigné une forme à la fonction F(V) du second membre de l'équation (5). Pour cela, il représenta le résultat de ses recherches par une courbe dont les abscisses étaient les V, et des termes $\frac{DJ}{4V}$ les ordonnées qu'il avait pu déduire des expériences susmentionnées ; cette courbe ayant affecté sensiblement l'allure d'une ligne droite, de Prony lui donna comme équation générale :

$$\frac{DJ}{4V} = a + bV, \qquad \text{ou} \qquad \frac{DJ}{4} = aV + bV^2,$$

a étant l'ordonnée pour $V = o$, et b le coefficient angulaire de la droite $a + bV$, soit deux constantes. Alors l'équation (5) peut s'écrire :

(5 *bis*) $$1/4\,\Pi DJ = \Pi(aV + bV^2) = F(V).$$

Puis, d'après les mêmes données, il détermina par la voie graphique, vérifiée par la méthode des moindres carrés de Laplace, la valeur des constantes a et b qui furent trouvées : $a = 0{,}0000173$ et $b = 0{,}000348$, et il obtint l'équation définitive :

$$\frac{DJ}{4} = 0{,}0000173V + 0{,}000348V^2.$$

Etelwein et d'Aubuisson trouvèrent, d'autre part, pour a et b des valeurs quelque peu différentes, ce qui n'altère en rien la généralité de la formule ci-dessus.

Cette formule de Prony se trouve souvent gravement en défaut. Darcy, à la suite de nombreuses expériences, plus variées et plus précises que celles dont s'était servi de Prony, a dû modifier cette équation, en l'écrivant de même sous la forme générale :

(6) $$\frac{DJ}{2} = a'V + b'V^2;$$

seulement, dans la détermination des constantes a' et b', tout en faisant

varier le diamètre, il a fait entrer en ligne de compte l'influence plus spéciale des tuyaux comme matière métallique ou autre des parois, comme degré de poli, nature de l'enduit, état d'entretien, dépôts calcaires ou ferrugineux, selon la qualité des eaux et le temps de service, etc.; et, par suite de considérations qui lui furent suggérées par ses célèbres et précieuses expériences, il fut amené à énoncer les lois suivantes :

1° Pour des tuyaux qui diffèrent, soit par la nature de leurs parois, soit par leurs diamètres; les coefficients a' et b' varient avec le degré de poli des parois et avec les diamètres;

2° Pour des tuyaux recouverts de dépôts, la résistance peut, comme l'avaient déjà admis Girard et d'Aubuisson, être considérée comme simplement proportionnelle au carré de la vitesse, ce qui réduit la formule (6) à la suivante :

$$\frac{DJ}{2} = b'V^2; \qquad (7)$$

3° La pression est sans influence sur la résistance;

4° Pour chaque tuyau et pour chaque diamètre, dès que la vitesse a atteint quelques décimètres, la formule (7) reproduit les résultats de l'expérience avec une exactitude qui est sensiblement la même que pour la formule (6); et que c'est surtout pour les tuyaux recouverts d'une couche de dépôts, et par conséquent à l'état normal des conduites d'eau, que cette coïncidence se rencontre;

5° Selon que la conduite est en tôle enduite de bitume ou en verre; en fonte ou en fer étiré neuf; en fonte ou en fer étiré recouverts de dépôts, les valeurs de b' et, par suite, celles de J sont à peu près, pour le même diamètre ou des diamètres sensiblement égaux, dans le rapport des nombres 1, 1,5 et 3;

6° Pour des tuyaux neufs, en fonte ou en fer étiré, sensiblement au même degré de poli et dont les diamètres ont varié de 0,0122 à 0,500, les valeurs des coefficients b' de (7) peuvent être représentés par la formule :

$$b' = 0{,}000507 + \frac{0{,}00001294}{D}. \qquad (8)$$

C'est à l'aide de cette formule (8), que Darcy a calculé les valeurs de b', que l'on trouve dans les aide-mémoire.

De la formule (7) on tire :

$$D = \frac{2b'V^2}{J}; \qquad \text{puis} \quad J = \frac{2b'V^2}{D}; \qquad \text{puis} \quad V = \sqrt{\frac{JD}{2b'}};$$

et comme on a :

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \times V,$$

on tire encore :

$$(9) \quad Q = \frac{\pi D^2}{4} \times \sqrt{\frac{JD}{2b'}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{JD^5}{2b'}}; \qquad \text{d'où} \quad D = \sqrt[5]{\frac{32}{\pi^2} \times \frac{b'Q^2}{J}},$$

et aussi :

$$(9\ bis) \qquad J = \frac{32}{\pi^2} \times \frac{b'}{D^5} Q^2 = 3{,}2423 \frac{b'}{D^5} Q^2.$$

Ces trois dernières formules sont, comme il est dit, applicables aux tuyaux neufs en fonte ou en fer étiré, et pour des conduites de peu de durée parfaitement montées. — Il faut doubler la valeur de b' dans ces formules, pour des conduites projetées en tuyaux de fonte ou de fer étiré devant servir longtemps, et, par suite, susceptibles d'être recouverts de dépôts, même au bout de peu de temps ; c'est le cas le plus général. Alors les formules (9) et (9 *bis*) deviennent, tous calculs faits :

$$(10) \qquad Q = \frac{\pi}{8} \times \sqrt{\frac{JD^5}{b'}}; \qquad \text{puis} \quad D = \sqrt[5]{6{,}4846 \frac{b'Q^2}{J}};$$

$$\text{puis} \quad J = 6{,}4846 \frac{b'}{D^5} \times Q^2.$$

Représentant par α le produit $6{,}4846 \frac{b'}{D^5}$, toujours calculable pour chaque diamètre, avec la valeur de b' tirée de (8), la troisième formule (10) donnera :

$$(11) \qquad J = \alpha Q^2; \qquad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{J}{Q^2} \quad \text{et} \quad Q = \sqrt{\frac{J}{\alpha}}.$$

L'*Aide-Mémoire Claudel*, que je cite parce que c'est celui dont j'ai plutôt l'habitude de me servir, donne un tableau où se trouvent les valeurs de b' calculées par (8), et de α, par $\alpha = 6{,}4846 \frac{b'}{D^5}$, pour des diamètres variant de $0^m{,}01$ à 1 mètre ; ce tableau est donc très étendu.

Pour préciser à nouveau : d'après les explications précédentes, il résulte que les valeurs de α du tableau Darcy-Claudel se rapportent à des tuyaux en service courant. Pour des tuyaux neufs, bien lisses et bien montés, ces valeurs α devront être divisées par 2. Pour des tuyaux en verre ou en tôle enduits de bitume, sans dépôts d'aucune sorte, ces mêmes valeurs de α seront divisées par 3.

L'emploi de ces divers diviseurs et leurs intermédiaires relève de l'appréciation de l'ingénieur chargé de l'étude d'une installation à créer ou à subir ; le choix est affaire de sagacité en chaque cas.

Voilà pour les tuyaux droits.

Revenons maintenant à notre équation (2), de condition.

Afin de se ménager des facteurs communs, on prendra pour le volume Q, débité par seconde, une seule expression, soit, celle qui résulte de la plus petite section, définie déjà ci-dessus à propos du terme n° 2, qui se rencontre pour l'évacuation au dehors : c'est, pour le cas général, la section des tuyaux de refoulement. — Soit donc D, le diamètre de ces tuyaux ; S, leur section ; V, la vitesse d'écoulement par seconde, qui y est relative ; on aura :

$$Q = SV; \qquad \text{puis} \quad Q^2 = S^2V^2; \qquad \text{puis} \quad V = \frac{Q}{S} \quad \text{et} \quad V^2 = \frac{Q^2}{S^2}.$$

Ceci établi, continuons à apprécier les hauteurs de la parenthèse du deuxième membre de (2).

Quatrième terme h_a. — Ce terme étant relatif à la perte de charge due à la résistance au mouvement, des parois des tuyaux droits à l'aspiration, appelons : L_a, la longueur développée de ces tuyaux ; S_a, leur section ; D_a, leur diamètre ; α_a, le coefficient du tableau Darcy-Claudel correspondant à ce diamètre. Alors, d'après ce qui vient d'être exposé à propos des formules de Darcy, et par définition même, on aura, en désignant par J_a, le produit $\alpha_a Q^2$, la perte de charge $h_a = L_a J_a$; ou d'après (11), $h_a = L_a \alpha_a Q^2$; et en remplaçant Q^2 par sa valeur ci-dessus, on écrira finalement :

$$4^e \text{ terme} : h_a = L_a \alpha_a S^2 V^2.$$

Cinquième terme h_r. — Ce terme est relatif à la perte de charge due à la résistance de frottement des tuyaux droits au refoulement. Appelons L la longueur de ces tuyaux de sec-

tion S et de diamètre D, auquel correspond un coefficient α de la table Darcy-Claudel. et l'on écrira directement :

$$5^e \text{ terme} : h_r = L\alpha S^2 V^2.$$

Sixième terme h_t. — Ce terme est relatif à la résistance propre du frottement de l'eau dans les canaux d'aubage d'un tambour mobile, considérés comme orifices fractionnaires de la section totale S_t de cet aubage, laquelle doit être égale à la section des tuyaux de refoulement légèrement augmentée pour viser de la contraction ; la vitesse de circulation y sera V, dans ces conditions. — Ce terme ne sera jamais obtenu qu'avec une approximation plus ou moins grande ; mais pour la bonne règle, et pour acquit de conscience, il est nécessaire de lui faire prendre rang comme on le trouvera.

On peut, sans erreur sensible, compter, comme longueur droite de ces orifices, la distance l, du moyeu à la circonférence extérieure du tambour (Voir *fig.* 13, Pl. II) ; alors n, étant leur nombre, leur section sera : $s_0 = \frac{S_t}{n} = \frac{S}{n}$, approximativement ; et le débit q_0, passant par chacun d'eux sera :

$$q_0 = \frac{Q}{n} = \frac{S}{n} \times V; \quad \text{d'où :} \qquad q_0^2 = \frac{S^2}{n^2} V^2.$$

De s_0 on tirera un diamètre fictif d_0, auquel s'attribuera un coefficient α'_0, du tableau Darcy-Claudel, lequel on rectifiera par le rapport du périmètre mouillé de la section réelle d'orifice relevé sur plan, au périmètre πd_0 de la section circulaire fictive s_0 ; on aura ainsi un coefficient α_t convenable pour ces orifices. A l'aide de ces éléments, on conclura :

$$6^e \text{ terme } h_t = nl\alpha_t\, q_0^2 = nl\alpha_t \times \frac{S^2}{n^2} V^2 = l\alpha_t \frac{S^2}{n} V^2.$$

Septième, huitième et neuvième termes. — Ces termes sont relatifs à la résistance des coudes, à l'aspiration s'il y en a ; au

refoulement de même, et enfin à celle du coude en spirale de l'enveloppe, autour du tambour mobile. — Pour apprécier les pertes de charge correspondantes, on peut appliquer la formule de Wiesbach, qui fournit des résultats assez exacts :

$$h_c = \frac{V^2}{2g}\left[0{,}131 + 1{,}847\left|\frac{D}{2\rho}\right|^{\frac{7}{2}}\right]\frac{\beta}{90^0},$$

dans laquelle V est la vitesse de circulation générale dans la section de diamètre D des tuyaux ; ρ, le rayon d'axe du coude ; et β, son angle au centre.

Telle qu'elle est écrite, avec les coefficients constants de sa parenthèse, cette formule se rapporte à des tuyaux en service courant, c'est-à-dire dont la résistance correspond à celle de la table Darcy-Claudel ; dans d'autres cas, il faudrait en modifier les résultats à l'aide des mêmes facteurs que l'on applique à ceux de la dite table, pour tuyaux neufs, tuyaux enduits de bitume, etc.

En fabrication générale de fonderie, le rayon ρ, d'axe d'un coude au 1/4, est égal à deux fois le diamètre de son trou de tuyau ; alors le terme $\frac{D}{2\rho} = \frac{D}{4D} = 0{,}25$; et

$$0{,}25^{\frac{7}{2}} = \sqrt{0{,}25^7} = 0{,}00781\,;$$

la parenthèse devient :

$$0{,}131 + 1{,}847 \times 0{,}00781 = 0{,}131 + 0{,}0144 = 0{,}145.$$

Et pour les coudes au 1/4, la formule se réduit à :

$$h_c = 0{,}145\,\frac{V^2}{2g}.$$

— Pour un diamètre D_a différent, sachant que le débit est le

même, cette même formule devient $h_r = \frac{S^2}{S_a^2} \times \frac{V^2}{2g} \times 0{,}145$. De sorte que, si N et N′ sont les nombres de coudes au 1/4 d'une conduite à l'aspiration et au refoulement, on peut poser :

$$7^e \text{ terme } h_{ca} = N \frac{S^2}{S_a^2} \times 0{,}145 \frac{V^2}{2g}.$$

$$8^e \text{ terme } h_{cr} = N' \frac{S^2}{S^2} \times 0{,}145 \frac{V^2}{2g}.$$

$$9^e \text{ terme } h_{cs} = \frac{S^2}{S_s^2} \left[0{,}131 + 1{,}847 \left|\frac{D}{2\rho}\right|^{\frac{7}{2}}\right] \frac{\beta}{90^0} \times \frac{V^2}{2g}.$$

S_s étant la section moyenne de ce coude spiraliforme, les autres éléments se déterminent sur le plan de la pompe.

Dixième terme h_{dc}. — Ce terme, dans un projet, sera toujours difficile à apprécier : à la suite d'une expérience, comme on le verra, il apparaîtra en différence exactement. Il comprend toutes les difficultés de circulation provenant des vices de montage dans les tuyautages de conduite ; tels que tuyaux ne se raccordant pas bien, comme figure 8 ; joints faits à la hâte avec des rondins en caoutchouc, qui débordent à l'intérieur (*fig*. 9) ; toutes causes qui entraînent des étranglements répétés de sections, dont chacun produit une perte de charge donnée par la formule $h_{dc} = \frac{(V_e - V)^2}{2g}$; V_e est la vitesse dans la section étranglée S_e comportant un coefficient de contraction m ; V est la vitesse dans le corps du tuyautage de section S.

Si l'on remarque qu'en vertu de la permanence on a :

$$Q = mS_e V_e = SV; \qquad \text{on tire } V_e = \frac{Q}{mS_e}; \qquad \text{puis } V = \frac{Q}{S};$$

il vient :

$$h_{dc} = \frac{1}{2g}\left[Q\left(\frac{1}{mS_e} - \frac{1}{S}\right)\right]^2 = \frac{V^2S^2}{2g}\left(\frac{1}{mS_e} - \frac{1}{S}\right)^2.$$

On peut avoir ainsi toutes les pertes analogues en fonction de la vitesse V, facteur commun. — S'il y a *n* accidents semblables sur tout le parcours d'un tuyautage de desserte, on aura finalement l'expression globale :

$$10^e \text{ terme } h_{dc} = V^2 \times \frac{S^2}{2g}\left(\frac{1}{mS_c} - \frac{1}{S}\right)^2 \times n.$$

Il se rencontre parfois, dans les tuyautages, des branchements d'équerre (*fig.* 10). Dans ce cas, la perte de charge piézométrique, mesurée directement, est donnée par la formule de Belanger reconnue exacte :

$$h_{be} = 2\,\frac{V^2}{2g} = \frac{V^2}{g}.$$

Mais ces accidents de tuyautage sont rares ; il est peu nécessaire de leur donner un numéro dans l'équation (2) de condition. Il va de soi qu'il y aurait lieu d'en tenir compte, le cas échéant.

D'une manière générale, dans les estimations qui viennent d'être faites jusqu'alors, chacun est libre, dans les applications, d'employer ses formules préférées ; on en trouve dans tous les traités et aide-mémoire. Je présente celles dont je me sers d'habitude, et dont l'emploi m'a toujours paru satisfaisant en pratique.

Onzième et douzième termes f_t et f'_t. — Nous arrivons, hors parenthèse, au calcul des 11ᵉ et 12ᵉ termes. Ces termes expriment le travail absorbé par la rotation propre du tambour mobile dans l'eau ; c'est un travail de frottements assimilable au travail des frottements mécaniques proprement dits, et qui, comme ce dernier, est indépendant du phénomène de l'élévation de l'eau en lui-même. Nous devons entrer dans quelques développements à son sujet : *Ceci est très important.*

Travail absorbé par la rotation d'un tambour mobile dans l'eau. — Ce travail est évidemment dû à la résistance d'un frot-

tement particulier, que les corps solides éprouvent de la part du fluide dans lequel ils se meuvent. Soit que ce frottement provienne d'un effet de capillarité, de viscosité, qui fait dire que certains corps mouillent au contact de l'eau; soit qu'il doive être attribué, et pour la plus grande part, à la rugosité, aux aspérités des surfaces solides qui glissent sur des surfaces liquides, en étendant, au plus près, leur action sur une certaine épaisseur de veines fluides télescopant les unes sur les autres; soit ces deux causes, et peut-être encore d'autres, réunies, ce frottement existe manifestement; et, par analogie avec le frottement des corps entre eux, il admet un certain coefficient φ, qui affecte proportionnellement toute surface mouillée S, qui serait $S = \pi DL$, pour un tronçon de tuyau par exemple; cela selon sa nature et son état physique.

On peut donc déjà caractériser ce frottement par le produit général $S\varphi$, ou $\pi DL\varphi$, pour un tronçon de tuyau. Quant à la résistance qu'il crée et au travail qu'il absorbe, ils sont évidemment fonction de la vitesse $F(W)$, définie plus haut. C'est la valeur de ce coefficient φ qu'il importe de connaître dans les applications. Cette valeur est contenue implicitement dans les formules de Darcy.

En effet : on a trouvé précédemment, pour exprimer la résistance au mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite, deux valeurs qui sont égalisées dans l'équation (3). D'après ce qui vient d'être dit, on peut y joindre la troisième valeur, $R = \pi DL\,\varphi\,F'(W)$, et écrire :

$$R = \frac{\pi D^2}{4} \times \Pi\zeta = \pi DL \times F(W) = \pi DL\varphi \times F'(W).$$

Comme on a vu, le facteur $F(W)$, de la deuxième valeur de R, a été déterminé par de Prony et Darcy. Par des arguments démonstratifs empruntés au général Poncelet (*Introduction à la mécanique industrielle*), il est possible d'obtenir la valeur de $F'(W)$ de la troisième expression.

Pour cela, appliquons à la résistance que peut créer le pro-

duit $\pi DL\varphi$, le théorème de l'effet du travail. — Il est visible que, pour un tronçon de tuyau de longueur L (*fig.* 7), il y aura, pendant le mouvement, une certaine masse indéterminée M, de fluide, qui sera dominée, activée en résistance, par la surface mouillée πDL. Dans tous les cas cette masse M sera *spécifiquement* proportionnelle au produit $\frac{\Pi \times 1}{g} \pi DL$; et le facteur $\pi DL\varphi$ deviendra, dans l'expression du travail résistant cherché, $\frac{\Pi \times 1}{g} \pi DL\varphi$. — Supposées partant du repos, toutes les molécules de cette masse M, pendant un espace infiniment petit, de, parcouru, prennent une vitesse proportionnelle à W, et une force vive également proportionnelle à $\frac{W^2}{2}$; et alors,

$$\frac{\Pi \times 1}{g} \times \pi DL \times \varphi \times \frac{W^2}{2}$$

est l'expression *spécifique* de la *force mouvante* qui parcourt le chemin de. — En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, la masse fluide M, entraînée, a réagi d'une quantité de force mouvante, ou force vive égale, pendant le même chemin parcouru de.

Si l'on appelle $R = \frac{\pi D^2}{4} \Pi\zeta$, cette réaction *spécifique* pour le poids du volume fluide de l'unité de longueur du tuyau ; en l'appliquant au poids du volume Q, correspondant à la longueur L, cette résistance sera $RQ = \frac{\pi D^2}{4} \zeta \Pi Q$, dont le travail pendant un espace parcouru de, sera égal au travail de la force mouvante qui vient d'être formulée. On peut donc écrire :

$$RQde = \frac{\pi D^2}{4} \zeta \Pi Q de = \frac{\Pi Q}{g} \times \pi DL \times \varphi \times \frac{W^2}{2} \times de ;$$

simplifiant, et remplaçant l'insaisissable W par la vitesse moyenne V, que l'on sait toujours déterminer, et à laquelle se

rapportent les valeurs expérimentales de Darcy, il vient :

$$(12) \qquad R = \frac{\pi D^2}{4} \zeta \Pi = \frac{\Pi}{g} \times \pi D L \varphi \times \frac{V^2}{2},$$

ou, d'une manière plus générale, pour une surface quelconque S :

$$(13) \qquad R = \frac{\Pi}{g} \times S \times \varphi \times \frac{V^2}{2}.$$

De (12), on tire pour les tuyaux :

$$\frac{D}{4} \times \frac{\zeta}{L} = \varphi \frac{V^2}{2g},$$

et comme on a fait $\frac{\zeta}{L} = J$, on a finalement, avec les notations des auteurs :

$$\frac{DJ}{2} = \varphi \frac{V^2}{g},$$

pour des tuyaux neufs ou en fer étiré; mais, pour de vieilles conduites, on devra, d'après la règle Darcy-Claudel, écrire la valeur double,

$$(14) \qquad DJ = \varphi \frac{V^2}{g}.$$

d'où l'on tire :

$$(15) \qquad \varphi = \frac{gDJ}{V^2}.$$

Remplaçant, dans cette dernière équation (15), J, par sa valeur tirée de (9 *bis*) en y faisant $Q^2 = \frac{\pi^2 D^4}{16} \times V^2$, on obtient :

$$(16) \qquad \varphi = \frac{gD}{V^2} \times \frac{32}{\pi^2} \times \frac{b'}{D^5} \times \frac{\pi^2 D^4}{16} \times V^2 = \frac{32 g b'}{16} = 2gb',$$

qui est la formule très simple, applicable aux tuyaux de service courant chargés de dépôts. — Pour des tuyaux neufs on aura, $\varphi = gb'$, et pour des tuyaux enduits de bitume ou en verre lisse, $\varphi = 2/3gb'$. — La table Darcy-Claudel permet de trouver facilement ces diverses valeurs.

On peut voir déjà que, pour un même tuyau, le coefficient de frottement φ est indépendant de la vitesse de circulation de l'eau et de la pression; il ne dépend que de la valeur expérimentale b' de Darcy, qui correspond à son diamètre.

Maintenant il y a une autre conséquence à tirer. — Dans la valeur (8) du coefficient $b' = 0{,}000507 + \frac{0{,}00001294}{D}$, le terme $\frac{0{,}00001294}{D}$ s'évanouit quand D devient très grand et *a fortiori* quand il devient infini; c'est ce qui arrive pour des surfaces planes se mouvant dans l'eau, les flancs d'un navire, etc. Alors b' se réduit à $b' = 0{,}000507$; et, pour ces cas de la pratique, φ devient pour les surfaces rugueuses et mouillantes :

$$\varphi' = 19{,}62 \times 0{,}000507 = 0{,}00994, \text{ soit } 0{,}0100.$$

Pour des surfaces courantes neuves peu rugueuses, φ' prend une valeur deux fois moindre,

$$\varphi'' = \frac{\varphi'}{2} = 0{,}0050.$$

Pour des surfaces bien peintes, bien poncées, grasses, peu ou point mouillantes, lame d'eau glissant sur lame d'eau, ce coefficient deviendra le tiers de φ', soit:

$$\varphi''' = 0{,}00333.$$

— Revenons maintenant à nos 11° et 12° termes : En appelant N, le nombre connu de tours par minute du tambour mobile de pompe, de rayon extérieur R_2 à la surface frottante



périphérique, on aura la vitesse circonférentielle de cette surface. $V_{c_2} = \omega R_2 = \frac{2\pi N}{60} \times R_2$. De cette vitesse il faudra retrancher la vitesse V de circulation de l'eau dans le coude d'enveloppe ; la vitesse relative frottante sera donc $V_r = \omega R_2 - V$.

La résistance due au frottement de la surface cylindrique extérieure de largeur b_1 (Voir *fig.* 2, Pl. I) sera, d'après (13), proportionnelle à cette surface, qui est exprimée par $2\pi R_2 b_1$, et on aura :

$$R = \frac{1000}{g} \times 2\pi R_2 b_1 \times \varphi_1 \times \frac{V_r^2}{2}.$$

et le travail absorbé de ce seul chef sera :

$$11^e \text{ terme } \quad \tau_{11} = \frac{1000}{g} \times 2\pi R_2 b_1 \varphi_1 \times \frac{V_r^2}{2} \times V_r$$
$$= 320 R_2 b_1 \varphi_1 V_r^3 = 320 R_2 b_1 \varphi_1 (\omega R_2 - V)^3.$$

A cause de la nature de cette surface frottante, composée de parties solides, extrémités des ailes, et de parties liquides, sections des orifices, le coefficient φ_1 sera compris entre les valeurs [illegible] et [illegible] ci-dessus ; peut-être la moyenne des deux.

Quant au 12e terme τ_{12} du travail absorbé par le frottement des joues du tambour mobile, on peut l'assimiler à celui de deux couronnes pleines tournant dans l'eau.

Pour un disque plein, en appelant V_c la vitesse circonférentielle [illegible] d'un point situé à une distance R de l'axe, le travail du frottement sur une épaisseur de couronne dR sera exprimé, comme ci-dessus, par :

$$d\tau = \frac{1000}{g} \times 2\pi R\, dR\, \varphi \frac{V_c^2}{2} \times V_c = \frac{1000}{2g} \times 2\pi R\, dR\, \varphi V_c^3$$

Mettant à la place de V_c sa valeur $\frac{2\pi R N}{60}$, on trouve la

nombre de tours N, on a :

$$(a) \qquad d.f_t' = \frac{1000N^3}{2g \times 60^3} \times \varphi_2 \times 2^4\pi^4R^4.dR.$$

Et pour le disque entier on aura, en intégrant de 0 à R_3 son rayon extérieur, et arrangeant les facteurs :

$$f_t' = \frac{1000N^3}{2g \times 60^3} \times \varphi_2 \times 2^4\pi^4 \frac{R_3^5}{5} = \frac{2 \times 1000 \times \pi}{2 \times 5 \times g} \times \varphi_2 \times \frac{2^3\pi^3R_3^3N^3}{60^3} \times R_3^2 = 64\varphi_2V_{c3}^3 \times R_3^2,$$

pour une seule joue : pour les deux joues, on aura :

$$f_t' = 128\varphi_2V_{c3}^3 \times R_3^2.$$

Pour deux joues annulaires, on aura la valeur de f_t' en intégrant (a), entre R_0 et R_3 ; ce qui donnera, parce que $V_{c0} = \omega R_0$ et $V_{c3} = \omega R_3$:

$$12^e \text{ terme} \quad f_t' = 128\varphi_2 (V_{c3}^3R_3^2 - V_{c0}^3R_0^2) = 128\,\varphi_2\,(\omega^3R_3^5 - \omega^3R_0^5) = 128\,\varphi_2\,(R_3^5 - R_0^5)\,\omega^3.$$

Treizième terme fm. — Ce terme, relatif aux frottements mécaniques, dans les paliers, les presse-étoupes, est facile à estimer d'après des données expérimentales, dans le cas le plus général de commande par courroie, alors que l'on connaît le diamètre de la poulie de commande, celui des fusées de l'arbre dans les paliers ; le nombre de tours N ; le travail transmis T_r et le poids des pièces en mouvement. — On détermine l'effort tangentiel R_t ; puis la tension de la courroie t, par la formule connue ; puis la tension totale du brin conducteur $T = R_t + t$; puis, par épure, la résultante de l'effort frottant R_f. — Par le nombre de tours N, on trouve la vitesse tangentielle frot-

tante v_f, des fusées de l'arbre ; et avec un coefficient de frottement égal à 0,10, on écrit :

$$13^{e}\ \text{terme}\ fm = 0{,}1 \times R_f \times v_f.$$

16. Établissement des équations de condition formulées. — On a maintenant tous les éléments nécessaires pour calculer, dans tous les cas de la pratique, l'équation de condition (2), soit qu'il s'agisse d'un projet, soit qu'il s'agisse d'analyser les circonstances d'une installation existante.

Ainsi cette équation (2), c'est-à-dire :

$$(2)\quad T_r = P\,(\overset{1}{H} + \overset{2}{h_c} + \overset{3}{h_{va}} + \overset{4}{h_a} + \overset{5}{h_r} + \overset{6}{h_t} + \overset{7}{h_{ta}} + \overset{8}{h_{cr}} + \overset{9}{h_{rs}} + \overset{10}{h_{tc}}) + \overset{11}{f_t} + \overset{12}{f_t'} + \overset{13}{f_m},$$

deviendra, en remplaçant les treize termes par les valeurs respectives qui viennent de leur être formulées, puis faisant $P = 1000Q = 1000SV$, et mettant V^2 en facteur commun pour les termes qui le comportent :

$$(17)\quad T_r = 1000SV \Big\{ \overbrace{H}^{1} + \overbrace{\frac{V^2}{2g}}^{2} + V^2 \Big[\overbrace{\frac{1}{4g}}^{3} + \overbrace{L_a\alpha_a S^2}^{4} + \overbrace{L\alpha S^2}^{5}$$

$$+ \overbrace{l\alpha_t \frac{S^2}{n}}^{6} + \overbrace{N \frac{S^2}{S_a^2} \times \frac{0{,}145}{2g}}^{7} + \overbrace{N' \frac{0{,}145}{2g}}^{8}$$

$$+ \overbrace{\frac{S^2}{2gS_t^2}\left(0{,}131 + 1{,}847\left|\frac{D}{2\rho}\right|^{\frac{7}{2}}\right)\frac{\beta}{90^\circ}}^{9} + \overbrace{\frac{S^2}{2g}\left(\frac{1}{mS_e} - \frac{1}{S}\right)^2 \times n}^{10} \Big] \Big\}$$

$$+ \overbrace{320R_1 b_1 \varphi_1 (\omega R_2 - V)^3}^{11} + \overbrace{128\varphi_2 (R_2^5 - R_0^5)\,\omega^3}^{12} + \overbrace{0{,}1 \times R_f \times v_f}^{13}.$$

17. Équations du travail d'élévation statique. — Les seconds membres des équations (2) et (17) peuvent se subdiviser en deux parties : une première partie, comprenant les produits par 1000SV, des dix termes de la parenthèse du second membre, représente le travail relatif au fait lui-même de l'élévation du poids d'eau 1000SV à la hauteur effective H, après avoir vaincu toutes les résistances provenant du tuyautage de desserte. Ce phénomène ne peut se produire sans que totalité ou partie de ces dix termes de parenthèse ne se développent solidairement, d'une manière obligatoire.

Désignons ce travail par T_s.

Non moins obligatoire sera le développement, à une même allure, du travail représenté par les termes n°s 11, 12 et 13; lequel restera le même, à bien peu près, qu'il y ait travail utile produit, c'est-à-dire évacuation du fluide au dehors, ou non. Le travail dépensé représenté par ces trois termes est donc distinct du travail d'élévation proprement dit, et doit être estimé à part. Par suite, l'équation (2) de condition pourra encore s'écrire :

$$(18) \qquad T_r = T_s + \overset{11}{f_t} + \overset{12}{f_t'} + \overset{13}{f_m}.$$

Représentons par H_s, signifiant *hauteur d'élévation statique*, la somme des dix termes de la parenthèse du second membre de l'équation (2) ; on écrira ainsi :

$$(19) \quad H_s = \overset{1}{H} + \overset{2}{h_e} + (\overset{3}{h_{va}} + \overset{4}{h_a} + \overset{5}{h_r} + \overset{6}{h_t} + \overset{7}{h_{ca}} + \overset{8}{h_{cr}} + \overset{9}{h_{cs}} + \overset{10}{h_{dc}})$$
$$= H + h_e + \Sigma_1,$$

en désignant par Σ_1 la somme des 3e, 4e, 5e, 6e, 7e, 8e, 9e et 10e termes, c'est-à-dire la somme, proprement dite, des résistances à la circulation générale dans les canaux et conduits.

De l'équation (17), on tirera de même manière cette autre

expression de H_s :

$$(20)\quad H_s = \overset{1}{H} + \overset{2}{\frac{V^2}{2g}} + V^2 \Bigg[\overset{3}{\frac{1}{4g}} + \overset{4}{L_a \alpha_a S^2} + \overset{5}{L\alpha S^2} + \overset{6}{l\alpha_t \frac{S^2}{n}}$$

$$+ \overset{7}{N \frac{S^2}{S_a^2} \times \frac{0,145}{2g}} + \overset{8}{N' \frac{0,145}{2g}} + \overset{9}{\frac{S^2}{2gS_s^2}\left(0,131 + 1,847 \left|\frac{D}{2\rho}\right|^{\frac{7}{2}}\right)\frac{\beta}{90^\circ}}$$

$$+ \overset{10}{\frac{S^2}{2g}\left(\frac{1}{mS_e} - \frac{1}{S}\right)^2 \times n} \Bigg] = H + \frac{V^2}{2g} + \Sigma_2 V^2,$$

en désignant la parenthèse par Σ_2.

Maintenant le travail que nous venons de désigner ci-dessus par T_s sera représenté comme suit, d'après les équations (19) et (20) :

$$(21)\quad T_s = 1000SV(\overset{1}{H} + \overset{2}{h_e} + (\overset{3}{h_{va}} + \overset{4}{h_a} + \overset{5}{h_r} + \overset{6}{h_t} + \overset{7}{h_{ca}} + \overset{8}{h_{cr}} + \overset{9}{h_{cs}} + \overset{10}{h_{dc}})$$

$$= 1000SV\,(H + h_e + \Sigma_1) = 1000SVH_s.$$

Et avec les équivalences des équations (17) et (20), on écrira aussi :

$$(22)\quad T_s = 1000SV \Bigg\{ \overset{1}{H} + \overset{2}{\frac{V^2}{2g}} + V^2 \Bigg[\overset{3}{\frac{1}{4g}} + \overset{4}{L_a \alpha_a S^2} + \overset{5}{L\alpha S^2} + \overset{6}{l\alpha_t \frac{S^2}{n}}$$

$$+ \overset{7}{N \frac{S^2}{S_a^2} \times \frac{0,145}{2g}} + \overset{8}{N' \frac{0,145}{2g}} + \overset{9}{\frac{S^2}{2gS_s^2}\left(0,131 + 1,847 \left|\frac{D}{2\rho}\right|^{\frac{7}{2}}\right)\frac{\beta}{90^\circ}}$$

$$+ \overset{10}{\frac{S^2}{2g}\left(\frac{1}{mS_e} - \frac{1}{S}\right)^2 \times n} \Bigg] \Bigg\} = 1000SV\left(H + \frac{V^2}{2g} + \Sigma_2 V^2\right) = 1000SVH_s.$$

C'est ces équations (21) et (22), du travail T_s, que j'ai appelées autrefois *équations du travail d'élévation statique ;* travail

qu'il faut nécessairement dépenser, comme il vient d'être dit, pour obtenir le travail utile recueilli à la hauteur H, c'est-à-dire

(23) $$T_u = 1000SVH;$$

Voici comment se peut justifier cette appellation : — En se reportant à la figure 1, et par l'équation (19), on voit que, pour amener le volume $Q_p = 1000SV$ à s'écouler à la hauteur effective H, il faut lui fournir un excès d'élévation h_e, génératrice de la vitesse V d'évacuation au dehors, plus une hauteur $\Sigma_1 = h_{va} + h_a + h_r + h_t + h_{ca} + h_{cr} + h_{cs} + h_{dc}$, pour parfaire les pertes de charges inhérentes à l'accomplissement du phénomène lui-même ; ce qui, au total, conduit à élever le volume Q_p d'eau, à une hauteur fictive H_s. Il faut donc, pour cela, que la pompe ait une allure de rotation telle que, si la vanne de décharge A est fermée, le niveau de l'eau s'élève, dans le tuyau vertical indéfini de refoulement, à une hauteur H_s, suivant le niveau ST, et s'y maintienne invariablement, s'il n'y a évacuation au dehors ; c'est le fait expérimental constant, vérifié.

La hauteur H_s est donc bien ainsi une hauteur d'élévation statique au niveau ST, et je me suis autorisé de cette similitude pour appeler le travail T_s, dont cette hauteur est un des facteurs, *travail d'élévation statique*.

18. Théorie du fonctionnement des pompes centrifuges. — Établissement du niveau d'élévation statique et de la pression. — Détermination de la vitesse de rotation d'un tambour mobile. — Dans l'hypothèse ci-dessus (*fig.* 1, Pl. I), de la vanne A fermée, la pompe étant en mouvement, l'écoulement nul, et le niveau ST, à la hauteur statique H_s, étant établi et maintenu par un nombre de tours N de l'appareil ; le travail dépensé, alors sensible sur l'arbre de la pompe, ne peut être attribué qu'aux frottements des pièces mécaniques et à ceux du tambour mobile,

organe opérateur, tournant dans l'eau : c'est le travail relatif aux termes nos 11, 12 et 13 des équations (2) et (17).

Dans de telles conditions, ce tambour mobile, de rayon extérieur d'aubage R_1, doit tourner, dans le fluide qui l'environne, comme un tambour fermé, contenant, disponible dans son volume, une masse d'eau M solidifiée avec lui, pour ainsi dire, par l'intermédiaire des aubes métalliques dont il est armé, lesquelles lui servent, à cette fin, d'arguments coercitifs.

Dans cet état, en désignant par ω la vitesse angulaire correspondant au nombre de tours N, cette masse d'eau, ainsi emmagasinée, possède en potentiel, de R_0 à R_1, une force vive de rotation exprimée par $1/2\ \omega^2\Sigma m R^2 = 1/2\ \omega^2 I = 1/2\ \omega^2 M R_g^2$, I étant le moment d'inertie de cette espèce de volant, et R_g, son rayon de gyration. De plus, cette même masse d'eau M est distribuée, du centre à la circonférence, en une suite de couches fluides concentriques qui sont soumises à des tensions centrifuges $\omega^2 R$, proportionnelles aux rayons qui leur correspondent, et dont l'ultime expression est la tension centrifuge $\omega^2 R_1$, à la circonférence extérieure de l'aubage de rayon R_1; ce que l'on peut exprimer, par catachrèse d'analogie, en disant que ces couches concentriques fluides sont arrangées *par ordre de densités potentielles*.

D'autre part, la colonne liquide statique H_s est aussi formée de couches fluides superposées, ayant chacune une densité potentielle mesurée par sa distance verticale à partir du niveau ST; la couche inférieure, correspondant à la hauteur H_s, ayant la densité potentielle de l'ordre le plus élevé.

Or le niveau statique ST étant atteint, on peut voir que la surface périphérique, à densité potentielle $\omega^2 R_1$ du tambour mobile, est chargé d'une colonne liquide à densité potentielle de hauteur H_s ; car, sur la figure 1, on lit facilement autour de cette surface :

$$H_a + h'' + h' - (H_a - h) = h'' + h' + h = H_s;$$

et comme le niveau statique ST s'établit et se maintient

invariablement, il s'ensuit qu'il y a en présence, à cette surface, deux forces d'une nature particulière qui se font équilibre, forces que l'on peut, pour les spécifier, appeler *forces fluides ou potentielles* (*vires in posse*); tout en se gardant de confusion entre cette appellation et l'expression d'*énergie potentielle*, qui désigne un travail accumulé statique, disponible. — Seulement, ici, il faut entrer dans quelques détails; car, si je sens bien ce que je veux dire, je ne sais pas, néanmoins, si je le dis bien; je crois donc nécessaire d'établir le *distinguo* suivant :

Distinction à établir entre les forces fluides, ou potentielles, et les forces d'inertie. — Soit considéré (*fig.* 11, Pl. II) : A est un réservoir à niveau *mn* maintenu constant; de ce réservoir part une tubulure dont le diamètre d'orifice, débouchant à travers une table fixe EF est *cd*. A côté se trouve, supposé bien guidé, un bloc vertical de glace B, pouvant également passer à travers la table EF; son diamètre $gh = cd$. La figure montre, sans qu'il soit besoin d'autres explications, une colonne liquide *abcd* et une colonne de glace *efgh* de même hauteur H et de même poids, reposant sur une vanne *pq*, qui peut les mettre en liberté toutes les deux simultanément.

Supposons que, fermée, la vanne *pq* soit brusquement tirée; l'eau s'échappera par l'orifice *cd* et le bloc de glace B commencera sa descente. On peut se demander quel sera le rapport des hauteurs de chute parcourues par les colonnes C et B dans un même temps, par exemple le temps que met le bloc B à descendre d'une hauteur égale à H.

Pour cela, en appelant x la hauteur cherchée pour la colonne liquide C, on a, par les formules de la chute des graves : $H = 1/2gt^2$ pour B, et $x = V_0t + 1/2gt^2$ pour C, qui commence son mouvement avec une vitesse initiale $V_0 = \sqrt{2gh}$, d'où l'on établit le rapport :

$$\frac{x}{H} = \frac{V_0t + 1/2gt^2}{1/2gt^2} = \frac{2V_0 + gt}{gt} = \frac{2V_0 + \sqrt{2gH}}{\sqrt{2gH}} = \frac{3\sqrt{2gH}}{\sqrt{2gH}} = 3.$$

Donc $x = 3H$; et la force vive, possédée à cet instant par la colonne liquide C, est de même le triple de celle que possède la colonne B au même moment.

Ainsi voilà ce qui arrive, théoriquement, de deux forces qui, par définition abstruse, ont l'apparence initiale de l'égalité au moment où elles commencent à produire leur mouvement.

La colonne de glace B représente ce que l'on est convenu d'appeler une *force d'inertie*, $P = mg$; mais cette désignation ne saurait convenir à la force fluide représentée par la colonne liquide C. Il semble plus rationnel de dire que l'une, la force C, est une force potentielle ou en éveil, l'autre, B, une force d'inertie ou en sommeil ; l'une, la force C, est une force alerte prête à agir, l'autre, B, qui a été faite ici son égale en poids pour les besoins de la démonstration, mais qui pourrait être plus pesante, une force lourde qui se repose dans une sécurité trompeuse (*caveant consules*) ; il n'y a pas à comparer ces deux entités.

De tout ceci on peut inférer que, de même que l'on compare entre elles les forces d'inertie ou en sommeil, on doit pouvoir comparer entre elles, mais seulement entre elles, les forces potentielles ou en éveil, parce qu'elles sont de même nature. — Voilà ce que je veux dire ; et sans pousser plus loin les dissertations philosophiques que peut comporter le sujet, revenons à notre chose.

D'après ce qui est dit plus haut, la tension centrifuge $\omega^2 R_1$, qui est développée à l'état potentiel sur toute la surface cylindrique extérieure du tambour mobile, est donc comparable à la force potentielle représentée par la colonne d'eau statique de hauteur H_1.

Et de même que les forces d'inertie se comparent entre elles par des quantités de mouvement, de même les forces potentielles doivent se comparer entre elles par les manifestations dynamiques qui leur sont propres.

Or la manifestation dynamique ultime de la colonne d'eau H_1 est exprimée par :

$$V = \sqrt{2gH_1}.$$

Comme pour la pierre qui s'échappe du panier d'une fronde, la manifestation dynamique de la tension centrifuge $\omega^2 R_1$ est représentée par la vitesse circonférentielle V_{c1}, correspondant à son rayon R_1 ; c'est-à-dire par :

$$V_{c1} = \omega R_1.$$

Or l'état d'équilibre des deux forces potentielles H_s et $\omega^2 R_1$ entraîne nécessairement l'égalité de leurs manifestations; il s'ensuit que l'on peut écrire, quand un niveau statique quelconque est établi par une pompe centrifuge :

$$V_{c1} = \omega R_1 = \sqrt{2gH_s}. \tag{24}$$

Ce qui se traduit par l'énoncé suivant :

Quand un niveau d'élévation statique, de hauteur H_s est établi par une pompe centrifuge, la vitesse circonférentielle extérieure de l'aubage de son tambour mobile, est égale à la vitesse que la gravité imprimerait à un corps tombant de cette hauteur d'élévation H_s.

C'est en effet ce que vérifie constamment l'expérience, avec cette restriction, toutefois, que H_s, dans la plupart des cas, reste plutôt un peu au-dessous de la valeur que peut lui attribuer l'expression (24); on verra des exemples de ce fait aux recherches expérimentales qui vont suivre.

L'expression (24), unique, ne peut comporter qu'une seule inconnue, ω, R_1 ou H_s ; et encore par V_{c1}, ω et R_1 sont-ils solidaires; on en tire :

$$H_s = \frac{\omega^2 R_1^2}{2g}, \qquad R_1 = \frac{\sqrt{2gH_s}}{\omega}, \qquad \omega = \frac{\sqrt{2gH_s}}{R_1}. \tag{25}$$

Connaissant ω, on obtient le nombre de tours par minute de la pompe pour produire un effet donné; c'est par l'équation :

$$\omega = \frac{6.28}{60} N = 0{,}10466N, \text{ et réciproquement.}$$

Cette équation (24), que l'on pourrait pour ainsi dire poser *a priori*, résume, selon moi, toute la théorie du fonctionnement des machines centrifuges, pompes ou ventilateurs. Elle en est l'équation fondamentale.

19. Hauteur d'élévation statique que peut atteindre une pompe centrifuge quelconque. — Sans se préoccuper tout de suite de la puissance à lui atteler pour la faire débiter, on peut dire que la hauteur d'élévation statique que peut établir et maintenir une, pompe centrifuge, n'est limitée que par le nombre de tours possible, à communiquer à son tambour mobile, pour ne pas le faire voler en éclat sous l'action de la force centrifuge. On peut évaluer la hauteur approximative à laquelle on peut ainsi parvenir avec sécurité, par l'application de la très élégante formule (Collignon, *Mécanique*, IVᵉ partie) :

$$t = \frac{\varpi S}{g} \times \omega^2 R^2,$$

qui exprime la tension exercée sur chaque élément matériel situé dans la section S de la couronne d'un volant soumis à une rotation angulaire ω ; formule dans laquelle R est le rayon de gyration de cette couronne, lequel, pour les joues d'un tambour mobile formant jante, sera exprimé par $R^2 = \frac{R_0^2 + R_1^2}{2}$; ϖ est la densité de la matière. De cette formule on tire :

$$\frac{gt}{S\varpi} = 1/2\omega^2 (R_0^2 + R_1^2).$$

Sachant que, pour la fonte ordinaire, dont la densité $\varpi = 7200$, l'effort de traction de sécurité peut être porté à 3 kilogrammes par millimètre carré, on aura en remplaçant dans la formule ci-dessus :

$$\frac{19.62 \times 3K^{os}}{0,000001 \times 7200} = 1/2\,\omega^2 (R_0^2 + R_1^2) = 8175 ;$$

ce qui représente une vitesse circonférentielle de 90 à 91^{m},00; et si l'on fait $1/2\omega^2(R_e^2+R_i^2)=2g$H, on trouve $H=\frac{8175}{19,62}=417^{m},00$; ce qui, dans la plupart des cas, porterait H_1 aux environs de 500 mètres. — On peut donc rêver des grandes hauteurs d'élévation. Le plus embarrassant, à ces altitudes, serait d'arriver à pouvoir réaliser les nombres de tours nécessaires; pour cette raison et pour d'autres qui s'enchaînent, il n'y faut point songer (Voir § 22). Les plus grandes hauteurs d'élévation pour des pompes centrifuges uniques, ne s'entendent jusqu'alors que de 20 à 30 mètres; c'est déjà quelque chose.

20. Lois du débit des pompes centrifuges. — La loi du débit des pompes centrifuges est à la fois simple et complexe.

Elle est simple en ce sens que, considérant la figure 1, quand le niveau ST est établi pour une vitesse circonférentielle donnée ωR_1, du tambour mobile, si l'on ouvre très peu la vanne A, l'eau s'échappera avec une vitesse engendrée par la hauteur $H_1 - H = h''$, c'est-à-dire $V = \sqrt{2g(H_1 - H)}$, et cet effet se répercutera à la sortie de l'aubage du tambour mobile, car saigner la colonne potentielle centripète H_1, c'est saigner sa potentielle équivalente de tension centrifuge contenue dans ce tambour; et alors le débit serait proportionnel à $s \times \sqrt{2g(H_1 - H)}$; mais, pour cela, il faut admettre que l'orifice s prêté et le débit sont très petits. On pourrait, en ne considérant que ce fait, produire un énoncé qui n'aurait aucune signification.

Il n'en va plus de même lorsque l'orifice prêté par la vanne A, augmentant progressivement, prend toutes les valeurs entre O et la section S d'écoulement final, que, comme il est déjà dit, l'on doit supposer *au maximum*, égale à la plus petite section qu'offre, dans son ensemble, le tuyautage de refoulement, jusques et y compris la section totale, mesurée normalement, des orifices d'aubage du tambour mobile.

Ainsi, en se reportant toujours à la figure 1, quelle que soit la position de la pompe centrifuge dans le courant du tuyautage pendant le fonctionnement, on peut la considérer, de par son nombre de tours N donné, comme ayant pour but de maintenir invariablement, par rapport au niveau d'aval MN, le niveau statique ST, dans la branche alimentaire fictive de gauche du siphon indiqué. — Quand le débit est nul, le niveau ST s'établit dans les deux branches de ce siphon fictif; mais aussitôt que l'on ouvre la vanne A, située à une hauteur H au-dessus de MN, l'évacuation de l'eau au dehors a lieu, et il se produit dans la branche de droite un abaissement du niveau ST. — Il doit en être ainsi en effet, car le débit ayant lieu, le travail d'élévation statique se manifeste et l'équation (21), c'est-à-dire :

$$T_s = 1000SVH_s$$

$$= 1000SV \left[\overset{1}{H} + \overset{2}{h_c} + \underbrace{(\overset{3}{h_{va}} + \overset{4}{h_a} + \overset{5}{h_r} + \overset{6}{h_t} + \overset{7}{h_{ca}} + \overset{8}{h_{cr}} + \overset{9}{h_{cs}} + \overset{10}{h_{dc}})}_{\Sigma_1} \right]$$

$$= 1000SV\,(H + h_c + \Sigma_1),$$

se développe pour tous les termes de la parenthèse du second membre, c'est-à-dire pour :

$$H_s = H + h_c + (h_{va} + h_a + h_r + h_t + h_{ca} + h_{cr} + h_{cs} + h_{dc}) = H + h_c + \Sigma_1$$

Alors il arrive ce qui se produit dans les cabinets d'eau des fontainiers, auxquels le présent cas est assimilable ; c'est que le niveau dans la branche de droite du siphon figuratif baisse d'une hauteur représentant la somme des pertes de charge inhérentes à la circulation de l'eau dans le tuyautage général ; et cette baisse, de hauteur piézométrique, n'est autre que :

$$\Sigma_1 = h_{va} + h_a + h_r + h_t + h_{ca} + h_{cr} + h_{cs} + h_{dc}.$$

Il s'ensuit que le niveau apparent, dans le tuyautage vertical de refoulement, s'établit à une hauteur $H + h_e$, en *st* au-dessus de MN, h_e étant la hauteur effective de la colonne d'eau génératrice de la vitesse V avec laquelle l'eau se débite par l'orifice que lui prête la vanne A; et les choses étant ainsi arrangées, le phénomène de l'évacuation de l'eau suivra son cours normal.

21. Effets de l'étranglement de l'orifice d'écoulement final. — On conçoit bien que, pour l'allure bien calculée d'une pompe avec son tuyautage de desserte, le débit maximum aura lieu pour une ouverture de la vanne A (*fig.* 1), égale à la section maximum S, définie ci-dessus, ce qui entraîne aussi le maximum des pertes de charge Σ_1. Mais si, pour cette même allure, qui maintient la même élévation statique H_s, on étrangle la vanne A, de manière à ne lui faire prêter qu'une section $S' = {}^1/_2\, S$, par exemple, le débit diminuera certainement, mais dans une mesure qui sera loin d'être proportionnelle au rapport des sections $\frac{S'}{S}$. — Ceci s'explique par la raison que, le débit diminuant, la somme des pertes de charge Σ_1 diminue également à cause de la moindre vitesse de circulation dans le tuyautage général; et comme le niveau statique reste le même, la différence $H_s - H = h''$ sera moins affectée par ce terme Σ_1, et prêtera, par suite, une valeur plus grande à h_e, laquelle deviendra, par exemple, h'_e, en $s't'$; et h'_e, de son côté, provoquera dans la section S′ une vitesse V′ d'évacuation du fluide, plus grande *relativement* que la vitesse V dans la section maximum S; c'est ce qui détruit la proportionnalité dans les débits, ainsi que l'accusent, d'une manière manifeste, toutes les expériences.

Calcul des vitesses d'évacuation pour des sections finales d'écoulement réduites. — Il est d'ailleurs facile, en pareille occurrence, de trouver ces vitesses V′ pour chaque ouverture fractionnaire de la vanne A; il n'y a qu'à se reporter à l'équa-

tion (20), qui donne la hauteur statique H_s, pour la section maximum S d'évacuation finale. Dans cette équation, lorsqu'il s'agit d'une application, tous les éléments de la pompe employée et ceux du tuyautage de sa desserte sont supposés connus, ainsi que la hauteur d'élévation réelle H ; on ne se propose que le volume Q à débiter, et par lui se détermine la vitesse $V = \frac{Q}{S}$ et $h_e = \frac{V^2}{2g}$. La hauteur H_s devient ainsi facile à calculer.

On peut remarquer, d'autre part, que la parenthèse du second membre de l'équation (20) ne renferme que des termes à valeurs constantes, relatifs aux divers accidents du tuyautage général, engagés tous avec le facteur commun visible $V^2 \times S^2 = Q^2$. — Si donc, pour une même allure de la pompe, soit une même hauteur statique H_s, on réduit la section S, à S', le volume débité deviendra Q'; la vitesse d'évacuation, V'; et le facteur $V^2 \times S^2$ sera $V'^2 \times S'^2$.

Dans ce cas, V' étant la seule inconnue à dégager, il n'y a qu'à remplacer dans la parenthèse de (20) S^2 par S'^2. Ou bien, si l'on a des calculs tout faits de la somme Σ_2, de cette parenthèse, pour la section S, on devra, ce qui revient au même, multiplier cette somme, pour une section S', par le rapport $\frac{S'^2}{S^2}$ pour avoir la Σ'_2 applicable. Après cela, il devient facile de dégager V' de l'équation (20), qui deviendra ainsi modifiée :

$$(26) \qquad H_s = H + \frac{V'^2}{2g} + V'^2 \Sigma_2 \times \frac{S'^2}{S^2};$$

d'où :

$$(27) \qquad V'^2 = \frac{H_s - H}{\frac{1}{2g} + \Sigma_2 \times \frac{S'^2}{S^2}}.$$

Dans ce dernier cas, comme on voit, il est seulement besoin de faire les calculs une fois pour toutes ; ceci a son importance pratique.

22. Limite du débit permanent que peut produire une pompe centrifuge pour une hauteur d'aspiration donnée. — On peut, à l'évidence, poser, comme principe et énoncé général, *qu'une pompe centrifuge ne peut fournir un débit supérieur à celui que l'aspiration peut lui prêter.* — Mais ici il faut bien s'entendre. D'après la figure 1 (Pl. I), on voit, de prime abord, que le débit est alimenté à l'aspiration par une colonne d'eau $z_0 = h_a = H_a \mp h$, pouvant provoquer une vitesse théorique $V_a = \sqrt{h_a \times 2g} = \sqrt{2g(H_a \mp h}$; colonne d'eau qui a pour limite $H_a = 10^m,33$, pour une hauteur d'aspiration, h, nulle : en général h garde le signe moins, les cas étant rares où l'on prend l'aspiration en charge.

De cette colonne $h_a = H_a \mp h$, il faut retrancher, pendant le mouvement, les pertes de charge : 1° due au clapet de pied ; 2° due aux frottements dans les tuyaux droits à l'aspiration ; 3° due aux coudes ; ce qui équivaut à indiquer que cette hauteur $h_a = H_a \mp h$ doit être corrigée par un coefficient m moindre que l'unité, et exprimée par conséquent par $mh_a = m\,(H_a \mp h)$.

Observations relatives au nombre d'aubes d'un tambour mobile. — Enfin il est une quatrième cause plus particulière qui peut influer sur le débit, c'est l'obstruction produite, à l'entrée dans l'aubage, par les aubes elles-mêmes, sur le nombre desquelles il vient ici à sa place d'appeler l'attention.

Chacun sait que l'on peut très bien se préserver d'être mouillé sous un parapluie recouvert d'une toile métallique, même à très grandes mailles, comme celui que représente la figure 12 (Pl. II), à condition de lui imprimer un mouvement de rotation d'autant plus rapide que les mailles sont plus grandes, toutes choses égales d'ailleurs. Ceci s'explique par une simple épure : ainsi ab représente la vitesse de la pluie tombante ; si le parapluie est au repos, l'eau passera par la section totale de la maille, dont bc est la dimension d'ouverture d'un fil à l'autre. Alors, aussitôt qu'a lieu le mouvement de rotation, dont la vitesse bd est représentée, dans le sens de la

flèche, à la même échelle que la vitesse *ab* de la pluie, cette vitesse *bd*, prise en sens contraire, se compose avec *ab*, pour donner la vitesse relative *bf* avec laquelle l'eau passera entre les fils *c* et *b*, par une section proportionnelle à $c'b' = cb \times \sin \alpha$. Mais, comme le régime est permanent, cette plus grande vitesse *bf* est plutôt fictive par rapport au débit réel, qui se trouve ainsi réduit, en cet état de mouvement de rotation, par chocs, viscosité, etc., dans le rapport $\frac{c'b'}{cb}$. — On voit aisément, sur l'épure, que par l'augmentation de la vitesse de rotation et par le rapprochement des fils *c* et *b*, selon leur diamètre ou l'encombrement de leur section quelconque, il arrivera que la pluie ne passera plus à travers la toile métallique du parapluie; ce résultat serait même, pratiquement, plus vite obtenu que ne peuvent le faire prévoir les considérations théoriques.

Il est bon d'avoir présents à l'esprit les enseignements de cette remarque, quand il s'agit d'arrêter la disposition, le nombre et la distribution des aubes à l'entrée d'un tambour mobile. Elle commande de n'employer que le nombre d'aubes strictement nécessaires, pour assurer la solidité de l'organe au point de vue de la résistance des matériaux, et elle indique ce qu'il faut pour déterminer le sectionnement des ouïes, en conciliant autant que possible toutes choses. Bien que ces règles et indications n'aient rien d'absolu, il est néanmoins bon d'y penser en construction, afin d'être préparé à toute fin.

De l'influence, sur le débit, de la vitesse circonférentielle au diamètre des ouïes, à l'entrée dans l'aubage d'un tambour mobile. — Maintenant, indépendamment des observations qui viennent d'être exposées, nous arrivons à une condition essentielle, à laquelle doit satisfaire une pompe centrifuge pour pouvoir débiter (Voir *fig.* 2, Pl. I, et *fig.* 13, Pl. II); c'est que la vitesse circonférentielle $V_{c0} = \omega R_0$, à l'entrée dans les aubes, sur le cercle des ouïes de rayon R_0, soit moindre que la vitesse d'arrivée de l'eau $V_a = \sqrt{2gh_a} = \sqrt{2g\,(H_a \mp h)}$; dans le cas où

ces vitesses V_a et V_{c0} arriveraient à l'égalité, le débit serait arrêté net. — Ceci se comprend : car de même qu'un niveau statique, de hauteur H_s, est maintenu à l'extérieur d'un tambour mobile par une vitesse circonférentielle des aubes, $V_{c1} = \sqrt{2gH_s}$, de même, si la vitesse V_{c0} est égale à la vitesse $V_a = \sqrt{2gh_a}$, produite par la colonne ascensionnelle, la vitesse de rotation des mêmes aubes empêchera toute pénétration de l'eau à l'intérieur du tambour mobile. Autrement dit, dans ces conditions, identiques aux précédentes, cette vitesse V_{c0} équilibre à rebours, et pour les mêmes raisons, une colonne statique d'une hauteur égale à h_a.

La présente règle est absolue, par suite elle impose les limites qui lui sont propres.

Ainsi une hauteur d'aspiration h_a étant donnée, pour un rayon R_0 des ouïes d'un tambour mobile, on saura déterminer le nombre de tours N_0, de la pompe, pour que l'aspiration soit sans effet ; c'est quand on aura :

$$\sqrt{H_s - h} = \sqrt{2gh_a} = \omega_0 R_0; \quad \text{d'où :} \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{2gh_a}}{R_0},$$

et l'on conclura le nombre de tours $N_0 = \frac{\omega_0}{0,10466}$. Par suite, on saura que la plus grande hauteur statique H_{sm}, que cette pompe pourrait *remplir* au refoulement, est donnée par :

$$H_{sm} = \frac{\omega_0^2 R_1^2}{2g}.$$

Voilà une limite qui ne peut, non seulement être dépassée, mais atteinte.

En effet : des données expérimentales permettent de dire qu'une pompe centrifuge cesse de débiter quand le rapport des vitesses $\rho = \frac{\sqrt{2gh_a}}{\omega_0 R_0} = \frac{V_a}{V_{c0}} = 1,10$; et, selon les appareils, par la disposition des aubes à l'entrée du tambour (aubes péné-

trant plus ou moins partiellement dans les ouïes), le nombre de ces aubes, leur encombrement plus ou moins réduit, etc., certaines pompes commencent à pouvoir débiter quelque peu, quand le rapport ρ, ci-dessus, est égal à 1,20. C'est là, toutefois, une valeur à laquelle il est prudent de ne pas descendre. Il vaut mieux adopter la valeur $\rho = 1,25$ pour la limite extrême de passable allure; on ne sera ainsi jamais tout à fait arrêté en pratique. Il reste entendu que, quand ce rapport ρ prend des valeurs plus grandes, 1,4, 1,5, etc., et plus, on peut gouverner le débit avec les vitesses de circulation convenables, conseillées par les formules de Darcy.

Théoriquement, d'ailleurs, on peut dire aussi, d'après des considérations développées (§§ 20 et 21), que le pouvoir alimentaire *effectif* de l'aspiration est déterminé, en chaque cas, par une hauteur de colonne ascensionnelle disponible h'_a, égale à la différence des hauteurs correspondant respectivement aux hauteurs génératrices de chacune des vitesses $V_a = \sqrt{2gh_a}$ et $V_{c0} = \omega R_0 = \sqrt{2gh_0}$, qui viennent d'être définies; ce qui se traduit par l'équation :

$$(\Gamma) \qquad h_a' = h_a - h_0,$$

et tant que, d'après cette équation (Γ), h'_a sera plus grande, toutes sections de circulation égales, que la hauteur h_e, deuxième terme de l'équation de condition (2) (§ 14), on obtiendra les débits théoriques que comporte cette formule, jusqu'à l'égalité $h'_a = h_e$ inclusivement; et, s'il arrivait $h'_a < h_e$, c'est alors h'_a, seule, qui gouvernerait un débit moindre; ce qui entraînerait une diminution dans le rendement mécanique, à cause des termes de l'équation (2), f_t et f'_t, qui gardent toujours leurs valeurs relatives.

Rappelons enfin que, dans les estimations pratiques, le terme général h_a est supposé corrigé par le coefficient m, dont il est parlé plus haut.

Nous mettons donc, ici, le doigt sur l'un des plus graves

écueils que présente le fonctionnement des pompes centrifuges. On ne saurait trop le signaler à l'attention. Tout ceci est inédit.

De ce qui précède, on peut encore conclure que, pour une même hauteur d'élévation, dire d'une pompe centrifuge que son débit augmente avec le nombre de tours de son tambour mobile n'a qu'une signification relative. Cela ne saurait être vrai qu'autant que l'équation (Γ) peut être satisfaite, c'est-à-dire jusqu'à une certaine limite, qui est atteinte, environ, quand le rapport $\rho = \frac{V_a}{V_{e0}} = 1{,}3$. En dessous de cette valeur de ρ, le tambour mobile commence à batailler dans les ouïes, en vertu de l'influence des aubes relatée ci-dessus, influence qui, à ce moment, prend la prépondérance; les règles théoriques cessent alors d'être applicables; et cependant qu'elles le sont dans une grande étendue en général pour les cas de la pratique des hauteurs d'élévation modérées, il arrive que, aux grandes hauteurs, atteignant et dépassant 15 mètres, là où il faut développer de grands nombres de tours, l'écueil signalé vient imposer sa loi impérieuse et gênante, en resserrant les limites. Il faut donc savoir composer avec lui ; ce qui n'est difficile, quand on se tient pour averti. — Nous aurons occasion de revenir sur ce paragraphe 22 à la quatrième partie du présent mémoire.

23. Des coefficients de rendement des pompes centrifuges. — Le coefficient de rendement $K_r = \frac{T_u}{T_r}$, d'une pompe centrifuge, pour chacune de ses allures, *à une même hauteur d'élévation effective* H, se tire du quotient des équations (23) et (18), c'est-à-dire :

$$(31) \qquad \frac{T_u}{T_r} = K_r = \frac{1000SVH}{T_s + f_t + f_t' + f_m}$$

$$= \frac{1000SVH}{1000SV\left(H + \frac{V^2}{2g} + \Sigma_2 V^2\right) + f_t + f_t' + f_m},$$

qui devient, en remplaçant les termes du dénominateur par leurs valeurs tirées des équations (17) et (22), et en englobant, dans cette dernière, le facteur $1/2g$, du terme $\frac{V^2}{2g}$, dans la Σ_2, qui deviendra ainsi $\Sigma = 1/2g + \Sigma_2$:

$$K_r = \frac{1000SVH}{1000SVH + 1000S\Sigma V^3 + 320R_1 b_1 \varphi_1 (\omega R_2 - V)^3 + 128\varphi_2 (R_3^5 - R_0^5)\omega^3 + f_m}.$$

Pour simplifier l'écriture, en supposant connues les valeurs respectives de φ_1 et de φ_2, on fera pour la suite :

$$1000S = \alpha, \qquad 320R_2 b_1 \varphi_1 = \beta, \qquad 128\varphi_2 (R_3^5 - R_0^5) = \gamma,$$

et on écrira :

$$(31) \qquad K_r = \frac{\alpha VH}{\alpha VH + \alpha\Sigma V^3 + \beta(\omega R_2 - V)^3 + \gamma\omega^3 + f_m}.$$

Or on peut estimer la valeur de la vitesse angulaire ω en fonction de la vitesse d'écoulement V, et réciproquement : pour cela on a, d'après (20) et (25), la suite d'égalités :

$$(32) \qquad H_s = H + \Sigma V^2 = \frac{\omega^2 R_1^2}{2g},$$

d'où l'on tire :

$$\omega = \left[\frac{2g}{R_1^2}\right]^{\frac{1}{2}} \times (H + \Sigma V^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{et } \omega^3 = \left[\frac{4,43}{R_1}\right]^3 \times (H + \Sigma V^2)^{\frac{3}{2}};$$

en remplaçant dans (31), on obtient :

$$(33) \quad K_r = \frac{\alpha VH}{\alpha VH + \alpha\Sigma V^3 + \beta\left[\frac{4,43}{R_1} \times R_2 (H + \Sigma V^2)^{\frac{1}{2}} - V\right]^3 + \gamma \times \frac{\overline{4.43}^3}{R_1^3}(H + \Sigma V^2)^{\frac{3}{2}} + f_m};$$

formule générale complète à laquelle conduit la présente théorie.

Étant donnée une pompe centrifuge quelconque, par exemple celle de la figure 13 (Pl. II), avec les différents rayons spécifiés R_0, R_1, R_2 et R_3 de son tambour mobile (*fig.* 14); le rayon r, des fusées de l'arbre dans les paliers; le rayon R_p, de la poulie de commande; l'installation du tuyautage de sa desserte; la hauteur d'élévation effective H, et la section S, d'évacuation au dehors; on peut, avec la formule (33), calculer les rendements mécaniques de cette pompe pour chacun de ses nombres de tours N, donnés. Il suffit, pour cela, de déterminer en chaque cas V et f_m.

A cet effet, d'après les données d'installation, on calcule d'abord, d'une manière aussi approchée que possible par l'équation (20), le facteur $\Sigma = \frac{1}{2g} + \Sigma_2$ des pertes de charge statiques qui devient ainsi une quantité connue. Puis par N on trouve $\omega = 0{,}10466N$, et des égalités (32) on tire :

$$(34) \qquad H_s = \frac{\omega^2 R_1^2}{2g}, \qquad \text{et} \qquad V = \sqrt{\frac{H_s - H}{\Sigma}}.$$

Et comme pour la pompe en question on connaît les valeurs des coefficients $\varphi_1 = 0{,}00388$ et $\varphi_2 = 0{,}00703$, par des expériences analysées ci-après, on est à même de calculer tous les termes de l'équation (33), sauf f_m.

Détermination des pourcentages de frottements mécaniques. — Pour obtenir ce terme f_m, on sait que, avec la vitesse circonférentielle V_p de la poulie de commande, on obtient la résistance tangentielle $R_t = \frac{T_r}{V_p}$; — puis la tension frottante de la courroie pour l'entraînement de cet effort tangentiel est donnée par la formule connue :

$$t_c = \frac{1{,}25 R_f}{e^{\frac{fs}{r}} - 1} = 1{,}25\ R_f = 1{,}25\ \frac{T_r}{V_p} \text{ environ,}$$

car ordinairement dans ces commandes de pompes, $e^{\frac{f\theta}{r}} - 1 = 1$; alors la tension totale devient :

$$T_c = R_t + t_c = (1 + 1{,}25)\frac{T_r}{V_p} = 2{,}25\frac{T_r}{V_p}.$$

Dans la généralité des cas, on peut admettre que le poids des pièces en mouvement, en composante avec T_c, laisse à l'effort frottant R_f résultant cette même valeur T_c : soit donc admis $R_f = T_c$. — Si les conditions admises ci-dessus n'étaient pas remplies, il en serait tenu compte en modifiant le facteur numérique 2,25.

Alors, d'après (17), f_m devient :

$$(35) \qquad f_m = 2{,}25\frac{T_r}{V_p} \times 0{,}10 \times v_f,$$

v_f étant la vitesse frottante ωr de l'arbre dans les paliers, et 0,10, le coefficient de frottement adopté, de métal sur métal.

Par suite, si, dans la valeur de $T_r = T_s + f_t + f''_t + f_m$, on fait $T_s + f_t + f'_t = T'_r$, et $f_m = x$, l'équation (35) devient :

$$(36) \qquad f_m = x = 2{,}25\frac{T'_r + x}{V_p} \times 0{,}10 \times v_f;$$

d'où l'on tire :

$$f_m = x = \frac{0{,}225 v_f}{V_p - 0{,}225 v_f} \times T'_r.$$

Si l'on remplace les vitesses circonférentielles par leurs valeurs en fonction de ω, il vient :

$$(37) \qquad x = f_m = \frac{0{,}225\omega r}{\omega R_p - 0{,}225\omega r} \times T'_r = \delta' T'_r,$$

en faisant :

$$\frac{0{,}225 r}{R_p - 0{,}225 r} = \delta',$$

c'est-à-dire un coefficient de pourcentage spécial à chaque appareil. Alors on aura : $T_r = T_r' + \delta' T_r'$, et K_r deviendra :

$$(38) \qquad K_r = \frac{\alpha VH}{T_r'(1 + \delta')};$$

équation dans laquelle T_r' représente les quatre premiers termes, et $\delta' T_r'$, le 5ᵉ terme du dénominateur de l'équation (33).

Maintenant si, au lieu de connaître le travail partiel T_r', on ne connaissait que le travail total T_r, pour trouver f_m, l'équation de condition (35) deviendrait :

$$(39) \qquad f_m = x = \frac{0{,}225 v_f}{V_p} \times T_r = \frac{0{,}225 r}{R_p} \times T_r = \delta T_r.$$

Selon les cas, on se servira de l'une ou de l'autre des équations (37) ou (39).

24. Du maximum de rendement d'une pompe centrifuge. — La nature des choses et l'examen des équations (33) et (34) indiquent que le coefficient K_r, fonction de la vitesse d'écoulement et, par suite, du volume débité, commence par la valeur 0, quand l'écoulement est nul, c'est-à-dire quand la hauteur statique est égale à H ; puis il prend de la croissance et atteint une valeur maximum pour une certaine valeur de V ; ensuite il va en décroissant assez lentement, au fur et à mesure que V, et par suite le volume débité, augmentent, la hauteur d'élévation réelle H restant la même.

La détermination du maximum d'une telle fonction demande une interprétation particulière. — Ainsi l'expression de T_r, devenue par sa dernière forme :

$$(40) \quad T_r = \alpha VH + \alpha \Sigma V^3$$
$$+ \beta \left[\frac{4{,}43 R_2}{R_1} (H + \Sigma V^2)^{\frac{1}{2}} - V \right]^3 + \gamma \times \frac{\overline{4{,}43}^3}{R_1^3} \times (H + \Sigma V^2)^{\frac{3}{2}} + f_m,$$

devient pour $V = 0$:

$$(41) \quad T_{r0} = \beta \times \frac{\overline{4{,}43^3 R_2^3}}{R_1^3} \times H^{\frac{3}{2}} + \gamma \times \frac{\overline{4{,}43^3}}{R_1^3} \times H^{\frac{3}{2}} + f_{m0};$$

f_{m0}, étant relatif aux deux premiers termes, se détermine à l'aide de l'équation (37) ; et l'équation (33) se réduit à :

$$(42) \quad K_{r0} = 0 = \frac{0}{\beta \frac{\overline{4{,}43^3 R_2^3}}{R_1^3} H^{\frac{3}{2}} + \gamma \frac{\overline{4{,}43^3}}{R_1^3} \times H^{\frac{3}{2}} + f_{m0}}.$$

Aussitôt que commence le moindre écoulement au dehors, le coefficient K_r apparaît très petit tout d'abord ; car le travail utile $T_u = \alpha VH$, lui-même très petit dans ce cas, est au dénominateur de (33) accompagné du travail parasitaire, alors relativement grand, T_{r0}, de (41), qui n'est pas le fait de ce petit écoulement d'eau, du petit travail utile alors manifesté. Mais, au fur et à mesure que la rotation s'accélère, le débit augmente et arrive à engendrer une certaine valeur de T_r, dans laquelle ce travail parasitaire originel T_{r0} se trouve dilué, englobé de telle sorte, par le travail résistant, inhérent à cette valeur du débit, que ce dernier doit le prendre à sa charge. C'est l'instant du maximum ; car ensuite les résistances inhérentes augmentent relativement au travail utile, numérateur de (33), et K_r diminue.

Par un autre raisonnement : En considérant toujours l'équation (33), on peut dire que K_r sera maximum pour un dénominateur relatif minimum.

Si cette équation se réduisait à $K_r = \frac{\alpha VH}{\alpha VH}$, K_r serait idéal, c'est-à-dire égal à l'unité ; ce qui l'en empêche en principe, indépendamment du terme parasitaire T_{r0}, c'est la somme des termes résistants du dénominateur qui naissent et croissent en même temps que le produit αVH, avec la vitesse d'écoule-

ment V. Il faut donc mettre ce produit αVH, en opposition avec ces termes de résistance inhérente, en les engageant avec lui par voie de soustraction, et dire que le maximum de K_r aura lieu quand cette différence sera elle-même maximum ; c'est-à-dire quand la somme de ces termes résistants sera la moindre par rapport au produit αVH, qui leur est simultané. — On peut donc écrire l'équation *indicatrice* suivante :

$$(43) \qquad \alpha VH - \left\{ \alpha \Sigma V^3 + \beta \left[\frac{4.43 R_2}{R_1} \times (H + \Sigma V^2)^{\frac{1}{2}} - V \right]^3 + \gamma \times \frac{\overline{4,43}^3}{R_1^3} \times (H + \Sigma V^2)^{\frac{3}{2}} + f_m \right\} = \text{maximum.}$$

Cette expression fournirait une équation déterminante du maximum cherché pour une valeur de V qui annulerait la dérivée de cette relation (43); et on voit qu'il s'agit bien d'un maximum, car la dérivée seconde serait visiblement négative.

Mais la dérivée du premier terme $d.\ \alpha VH = \alpha H$, de cette équation indicatrice, est un nombre abstrait, inerte, représentant un cylindre d'eau en poids, qui n'aurait aucune signification s'il ne symbolisait le travail général quand la vitesse V, d'écoulement, est nulle. Ce terme dérivé tient donc lieu, ici, de la valeur concrète de ce travail limite, dont l'expression (41), ci-dessus déterminée,

$$T_{r0} = \beta \times \frac{\overline{4,43}^3 R_2^3}{R_1^3} \times H^{\frac{3}{2}} + \gamma \times \frac{\overline{4.43}^3}{R_1^3} \times H^{\frac{3}{2}} + f_{m0}$$

devra prendre la place de $d.\alpha VH$, dans la dérivée du polynôme (43) égalée à zéro. Alors en exprimant f_m par (37), en fonction de T'_r, puis dérivant, et remarquant que la dérivée $d.\ f_m = d.\ T'_r\,\delta'$, de f_m, est égale à la dérivée de la somme des quatre premiers termes de l'expression (40), du travail total T_r, multipliée par le coefficient de pourcentage δ', il vient, tous calculs faits, l'équation de condition suivante du maximum

Tableau A. — Calculs appliqués a une pompe centrifuge, a l'aide des formules de la théorie statique

Nota. — La hauteur statique sans écoulement, $H_s = H = 6^m,53$ = hauteur d'élévation effective, correspond à 540 3/4 tours de pompe.

Nombre de tours	ω	ωR_1	$\omega^2 R_1^2$	$\frac{\omega^2 R_1^2}{2g}$	Élévation effective		$\left(\frac{H_s - H}{\Sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$	$V \times 31,4$	$Q_p \times H_s$	$0,047 \times V_f^3$	$T'_r \delta'$	$Q_p \times H$	$T_s + f_t + f_m$	$\frac{T_u}{T_r}$	$0,000404 \times \omega^3$	$T'_{r_1} \delta'$	$T_s + f'_t + f'_m$	$\frac{T_u}{T_{r_1}}$
N				H_s	H	$H_s - H$	V	Q_p	T_s	f_t	f_m	T_u	T_r	K_r	f'_t	f'_m	T_{r_1}	K_{r_1}
									k	kt	kt	kt	kt		kt	kt	kt	
540,74	56,393	11,318	128,118	6,530	6,530	0	0	0	0	70,28	2,70	0	72,98	0	73,386	5,531	149,197	0
545	57,04	11,408	130,142	6,633	6,530	0,100	0,608	19,09	126,62	61,10	7,20	124,65	194,92	0,639	74,82	10,10	272,64	0,456
550	57,563	11,512	132,537	6,755	6,530	0,225	0,913	28,63	193,38	57,71	9,55	186,95	260,64	0,718	76,15	12,57	339,81	0,5502
560	58,610	11,722	137,405	7,003	6,530	0,473	1,3235	41,55	291,02	54,64	12,80	271,32	358,46	0,7569	81,39	16,38	443,43	0,6149
570	59,656	11,931	142,348	7,255	6,530	0,725	1,637	51,40	372,90	53,06	16,34	335,64	442,30	0,7588	85,84	19,57	531,37	0,6316
580	60,702	12,140	147,380	7,511	6,530	0,981	1,906	59,84	449,45	52,18	19,246	390,75	520,87	0,7503	90,95	22,73	615,21	0,6331
590	61,749	12,350	152,520	7,773	6,530	1,243	2,145	67,35	523,51	51,77	22,04	439,79	597,32	0,7362	95,22	25,97	696,47	0,6319
600	62,796	12,559	157,728	8,049	6,530	1,519	2,370	74,45	599,24	51,55	24,95	486,16	675,74	0,7194	100,15	28,82	779,76	0,6236
610	63,842	12,768	163,021	8,309	6,530	1,779	2,566	80,57	669,47	51,79	27,74	526,12	749,00	0,7024	105,23	31,69	858,18	0,6145
620	64,889	12,977	168,400	8,583	6,530	2,053	2,757	86,57	743,03	52,10	30,89	565,30	826,02	0,6843	110,49	34,86	940,48	0,6011
630	65,935	13,187	173,930	8,863	6,530	2,333	2,931	92,03	815,66	52,68	33,30	600,95	901,64	0,6664	115,91	37,81	1024,64	0,5865
640	66,982	13,396	173,452	9,146	6,530	2,616	3,112	97,71	893,65	53,13	36.30	638,04	983,08	0,6497	121,51	40,12	1108,41	0,5756
650	68,029	13,605	185,090	9,434	6,530	2,904	3,279	102,96	971,32	53,82	39,34	672,32	1064,48	0,6317	127,32	44,23	1196,69	0,5618
660	69,075	13,815	190,850	9,727	6,530	3,197	3,441	108,04	1050,90	54,59	42,37	705,50	1147,86	0,6146	132,29	47,50	1285,28	0,5488
675	70,645	14,129	199,628	10,175	6,530	3,645	3,674	115,36	1173,78	56,37	47,24	753,30	1277,39	0,5897	142,30	52,71	1425,16	0,5285
690	72,215	14,443	208,600	10,632	6,530	4,102	3,898	122,34	1300,61	57,37	52,65	798,88	1410,63	0,5663	152,36	57,97	1568,25	0,5094
705	73,785	14,757	217,769	11,099	6,530	4,569	4,154	130,43	1437,64	58,38	57,47	851,70	1553,49	0,5482	162,44	61,94	1720,40	0,4950

cherché :

$$(44) \qquad \beta \frac{\overline{4,43}^3 R_2^3}{R_1^3} H^{\frac{3}{2}} + \gamma \frac{\overline{4,43}^3}{R_1^3} H^{\frac{3}{2}} + f_{m0}$$

$$- \left\{ 3\alpha\Sigma V^2 + 3\beta \left[\frac{4,43 R_2}{R_1} \times (H + \Sigma V^2)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \times \frac{4,43 \times \frac{R_2}{R_1} \times \Sigma V - (H + \Sigma V^2)^{\frac{1}{2}}}{(H + \Sigma V^2)^{\frac{1}{2}}} \right.$$

$$\left. + 3\gamma \frac{\overline{4.43}^3}{R_1^3} \times \Sigma V \times (H + \Sigma V^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \times (1 + \delta') - \alpha H \delta' = 0;$$

équation complexe, de laquelle on peut dégager V par calculs d'approche, épure graphique et interpolation. Cette équation, d'ailleurs, ne peut avoir qu'un intérêt scientifique purement spéculatif, car chaque système de pompe comporte des tares propres, qui font souvent dévier la théorie dans les applications pratiques.

25. Tableau des résultats d'application d'une pompe centrifuge, calculés d'après la théorie statique. — Pour terminer cet exposé de la théorie statique proprement dite des pompes centrifuges, je présente le tableau A, ci-contre, des résultats probables que devrait fournir la pompe représentée (*fig.* 13, Pl. II), par l'application qui lui est faite, pour différentes allures, à une même hauteur d'élévation H, de la formule générale du travail réel dépensé, c'est-à-dire l'équation (17), devenue par des conventions ultérieures [dénominateurs des équations (31)] :

$$(45) \quad T_r = 1000 SVH + 1000 S\Sigma V^3 + 320 R_1 b_1 \varphi_1 (\omega R_2 - V)^2 + 128 \varphi_2 (R_3^5 - R_0^5)\, \omega^3 + f_m ;$$

laquelle, réduite encore, prend la forme définitive :

$$(45\ bis) \quad T_r = \alpha VH + \alpha \Sigma V^3 + \beta (\omega R_2 - V)^2 + \gamma \omega^3 + \delta' T_r'.$$

Pour mettre en lumière l'influence des frottements du tam-

bour mobile tournant dans l'eau, ce tableau présente deux pourcentages de rendement; l'un est obtenu en ne considérant que la seule résistance due au frottement de la surface périphérique du tambour, abstraction faite du frottement des joues latérales, pour le cas où la chose serait réalisable et réalisée; l'autre en comptant la totalité des résistances. On verra plus loin ce qui peut autoriser à faire ce dédoublement.

Les données pour cette application, tirées des analyses expérimentales ci-après (Voir tableau B, Pl. IV), sont les suivantes :

$H = 6^{m},53$, $S = 0^{m^2},0314$, $\Sigma = 0,271$, $\varphi_1 = 0,00385$, $\varphi_2 = 0,00703$.

Puis on relève sur les figures 13 et 14 (Pl. II) :
Rayon du tambour mobile, $R_1 = 0,200$.
Rayon de moyenne distance du profil de ce tambour, $R_2 = 0^{m},202$.
Longueur développée de ce profil, $b_1 = 0^{m},188$.
Rayon extérieur des disques frottants des joues, $R_3 = 0^{m},215$.
Rayon des ouïes, estimé pour compensation à $R_0 = 0^{m},100$.
Rayon de la poulie de commande, $R_p = 0^{m},140$.
Rayon frottant de l'arbre, $r = 0^{m},023$.

De ces données, on tire encore les facteurs constants :

Par (37), $\delta' = \dfrac{0,225 \times 0,023}{0,14 - 0,225 \times 0,023} = 0,0385$. Puis :

$\alpha = 1000\ S = 31,4$, $\beta = 320 \times 0,202 \times 0,188 \times 0,00385 = 0,047$.

Enfin, $\gamma = 128 \times 0,00703 \times (0,215^5 - 0,100^5) = 0,0004044$.

Voici un exemple des calculs appliqués à une ligne de ce tableau, celle du nombre de tours $N = 600$:

On a successivement : $\omega = \dfrac{6,28}{60} \times N = 0,10466 \times 600 = 62^{m},796$.

Puis : $\omega R_1 = 62,796 \times 0,2 = 12,56$, $\omega^2 R_1^2 = 157,728$, et $H_s = \dfrac{157,73}{19,62} = 8,049$.

Par (34), on a : $V = \sqrt{\dfrac{H_s - H}{\Sigma}} = \sqrt{\dfrac{8,049 - 6,53}{0,271}} = 2^{m},370$, puis,

$Q_p = 31,4 \times 2,37 = 74^{l},45$, et $T_s = Q_p \times H_s = 74,45 \times 8,05 = 599^{kt},24$.

Puis : $f_t = \beta(\omega R_2 - V)^3 = 0{,}047\,(62{,}796 \times 0{,}202 - 2{,}370)^3 =$ **51kt,55.**

$$f_m = \delta T'_r = 0{,}0385 \times (599{,}24 + 51{,}55) = \mathbf{24^{kt},95}.$$

Ensuite l'on a : $T_u = Q_p \times H = 74{,}45 \times 6{,}53 =$ **486kts,16.**
Puis on conclut un premier T_r, abstraction faite du frottement des joues,

$$T_r = T_s + f_t + f_m = 599{,}24 + 51{,}55 + 24{,}95 = \mathbf{675^{kt},74}.$$

Et on établit un premier coefficient de rendement

$$K_r = \frac{T_u}{T_r} = \frac{486{,}16}{675{,}74} = \mathbf{0{,}7194}.$$

Maintenant, en tenant compte du frottement des joues, on calcule :

$$f'_t = \gamma\omega^3 = 0{,}0004044 \times 62{,}796^3 = \mathbf{100^{kt},15}.$$

Puis : $f'_m = \delta'(T_s + f_t + f'_t) = 0{,}0385(599{,}24 + 51{,}55 + 100{,}15) =$ **28kt,82.**
Alors il vient un deuxième travail total dépensé :

$$T_{r_1} = T_s + f_t + f'_t + f'_m = 599{,}24 + 51{,}55 + 100{,}15 + 28{,}82 = \mathbf{779{,}76}.$$

Enfin on obtient le deuxième coefficient de rendement net :

$$K_{r_1} = \frac{T_u}{T_{r_1}} = \frac{486{,}16}{770{,}76} = \mathbf{0{,}6236}.$$

Ainsi le seul frottement des joues latérales du tambour, même à cette allure modérée, fait baisser le rendement de :

$$0{,}7194 - 0{,}6236 = 9{,}58\ 0/0.$$

Ce tableau A, qui indique la manière dont se décompose le travail absorbé pour chaque allure de la pompe, révèle bien des faits qui ne sont généralement que soupçonnés.

A signaler entre autres à l'attention, l'examen des colonnes f_t et f'_t, ainsi que l'examen des colonnes K_r et K_{r_1}, qui mettent bien en évidence la grande influence des frottements propres du tambour mobile tournant dans l'eau ; puis la raison qui fait prendre au terme f_t une valeur sinon constante, mais du moins de variation très lente, à cause du facteur de sa formule $(\omega R_2 - V)^3$, qui varie lui-même très peu, justifiant ainsi la forme spiraliforme rationnelle du coude d'enveloppe à circulation de vitesse constante. A remarquer aussi, que ce même terme f_t prend des valeurs d'abord décroissantes, et

ensuite croissantes; ce qui fait changer, dans cet intervalle, le signe de la valeur de sa dérivée dans (44); dérivée de laquelle on conclut, en l'égalant à zéro, la vitesse d'écoulement V, qui donne à ce terme sa valeur minimum; pour cela, il n'y a qu'à poser :

$$\frac{1{,}43R_2}{R_1} \times \Sigma V = (H + \Sigma V^2)^{\frac{2}{1}}; \quad \text{d'où} \quad 2g \times \frac{R_2^2}{R_1^2} \times \Sigma^2 V^2 = H + \Sigma V^2;$$

expression dont on tire :

$$V = \sqrt{\frac{H}{2g \times \frac{R_2^2}{R_1^2} \times \Sigma^2 - \Sigma}}.$$

formule que vérifie exactement la vitesse V $= 2^m,334$ du tableau A, correspondant à 598-599 tours.

Incidemment on peut se rendre compte que l'équation (44) est bien vérifiée par les vitesses, V $= 1^m,590$ (568 tours), pour le premier K_r, et V $= 2^m,120$ (580 tours), pour le deuxième K_{r1}; ce qui justifie l'exactitude de cette formule du maximum que les résultats du tableau A accusent nettement.

La figure 16, planche II, expose graphiquement les résultats du tableau A : la courbe *amnb* représente à échelle amplifiée les rendements K_r; la courbe *am'n'b'*, les rendements K_{r1}; la courbe *acd*, la parabole des variations des hauteurs statiques H_s, et la courbe *agk*, la parabole de variation des débits. Les abscisses représentent les nombres N de tours par minute.

Mais, il faut le déclarer pour conclure, les résultats de ce tableau sont plutôt théoriques; ils ne concordent pas constamment avec les faits de la pratique, qui, comme on va le voir, ménage bien des surprises.

TROISIÈME PARTIE

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR LE FONCTIONNEMENT DES POMPES CENTRIFUGES

26. Analyses des expériences faites sur une pompe centrifuge, construite par MM. Olry et Grandde-mange. — En 1882, MM. Olry et Granddemange, constructeurs, avec qui je collaborais alors, entreprirent la création d'une série commerciale de pompes centrifuges. Ces Messieurs étaient en relations d'affaires avec M. Couronne, Inspecteur des machines du service des Eaux de la ville de Paris. Ils lui firent part de leur projet et de nos espérances, qui ne tendaient à rien moins que d'obtenir des rendements de 70 à 75 0/0, ce qui laissait M. Couronne très sceptique ; sa vieille expérience d'hydraulicien émérite lui faisait beaucoup nous rabattre de nos prétentions.

Par son intermédiaire, MM. Olry et Granddemange obtinrent de l'Administration de pouvoir s'installer au quai d'Auteuil, à l'annexe des eaux de la ville, pour y procéder aux expériences rapportées au tableau B, planche IV, ci-annexé. L'Administration avait gracieusement mis à leur disposition la bâche de mesurage qui se trouvait alors disponible à l'établissement.

D'autre part, M. Couronne, qui voulait bien s'intéresser à ces expériences, avait imposé comme condition que l'installation de la pompe et de son tuyautage fût suffisamment sommaire

pour rentrer dans les conditions ordinaires de la pratique ; sous cette réserve, aucune précaution particulière ne pouvait trouver grâce. Aussi le tuyautage fut fait de pièces et de morceaux, fournis, empruntés, en fonte, en tôle galvanisée, rèche, avec têtes de rivets en saillie; irréguliers, se raccordant plus ou moins bien ; des joints faits avec des torons en caoutchouc, etc. ; c'en était même par trop sommaire ; c'est ce qui explique les grandes résistances à la circulation que l'on a pu constater, mais c'était voulu ainsi : voilà ce qu'il fallait dire tout d'abord. On peut donc hardiment, pour l'analyse, appliquer à ces tuyaux les coefficients de Darcy les plus élevés, c'est-à-dire ceux de la table Darcy-Claudel.

La pompe expérimentée est représentée à l'échelle de 1/10 (*fig.* 13 et 14, Pl. II), ainsi que la vanne A de décharge au dehors (*fig.* 15), à section variable sans contraction sensible. Ces figures suffisent pour la compréhension du système.

Par la disposition, avec les coquilles de l'enveloppe, des joints latéraux du tambour mobile, de diamètre plus grand que celui de l'aubage, on devait, dans ma pensée, réaliser, ou à peu près, pendant le fonctionnement, l'étanchéité de ces joints contre les rentrées d'eau dans les ouïes. Pour vérifier le fait, je fis placer un robinet-jauge de 6 millimètres en *r*, de manière à explorer ce qui se passait dans les couronnes vides annulaires C, entre les joues et les coquilles d'enveloppe. Par la suite, M. Couronne nous fit placer un second robinet semblable en *r'*, sur le tuyautage d'aspiration (Voir schéma du tableau B, Pl. IV); on verra pourquoi.

Ce que j'avais pressenti arriva bien, mais avec des alternatives bien extraordinaires, bien imprévues : Ainsi pour une allure donnée de la pompe, à 638 tours et plus, et les débits se faisant à pleine section S de la vanne A (Exp. VIII), non seulement le robinet *r* accusait l'étanchéité des joints, mais encore appelait au vide ; c'est-à-dire aspirait l'air du dehors jusqu'au désamorçage de la pompe, lequel arrivait au bout de vingt-cinq secondes ; après quoi, en fermant le robinet *r*, la pompe se réamorçait seule. Dans les mêmes conditions, le

robinet r' de M. Couronne, sur le tuyautage d'aspiration, produisait le désamorçage en vingt-trois secondes, et la pompe ne pouvait plus se remettre en marche; il fallait rapporter de l'eau pour remplir le vide qui s'était formé jusque un peu au-dessous du robinet r', le clapet de pied ne retombant pas, dans ce cas, assez vite sur son siège.

De plus, à la même allure de 638 tours et au dessus, en étranglant la vanne A, aux 3/5, à la moitié, au tiers, au quart, les débits étaient réduits (Exp. II, III et III *bis*), et le robinet r donnait de l'eau à jets d'autant plus tendus que la vanne était plus étranglée; il y avait donc alors rentrée d'eau au centre dans les ouïes; ou bien l'eau de l'aspiration rentrait dans les couronnes C, ce qui n'est guère possible, puisque dans ces circonstances la pompe ne se désamorçait pas.

De plus encore la pompe marchant aux environs de 600 tours et la vanne A ouverte en grand, le débit était très réduit (Exp. V), et le robinet r donnait aussi de l'eau à jet tendu. Voilà, certes, des faits nouveaux que, l'appareil s'y prêtant, nous avons tous pu observer à loisir.

Ces révélations du robinet-jauge r peuvent aider à faire quelque lumière sur des points encore bien obscurs, concernant le fonctionnement des pompes centrifuges. Aussi, malgré l'ennui et la fatigue qu'il en pourra éprouver, j'appelle plus particulièrement l'attention du lecteur sur l'analyse qui va suivre, des expériences du tableau B, planche IV; tout l'intérêt de ce mémoire étant plutôt concentré là.

27. Calculs d'analyses des onze expériences du tableau B (Pl. IV). — D'après le plan d'installation porté au tableau, à l'échelle de 1/100, on relève :

A l'aspiration	Longueur totale des tuyaux droits jusqu'aux ouïes	$L_a = 12^m,700$
	Deux coudes, un au 1/8, l'autre au 1/16, de rayon d'axe........................	$\rho = 0^m,500$
	Diamètre des tuyaux, $D_a = 0,250$; leur section $S_a = 0^{m2},049$; d'où $S^2_a = 0,002401$.	

Au refoulement	Longueur de tuyaux droits jusqu'au centre de la pompe, plus longueur de vanne A. $L_r = 3^m,270$ Un coude au 1/4, de rayon d'axe......... $\rho = 0^m,400$ Diamètre des tuyaux, $D_r = 0,200$; leur section $S_r = 0^{m2},0314$; d'où $S_r^2 = 0,000986$.
Tambour mobile.	Diamètre du tambour mobile de la pompe (aubage)...................... $2R_1 = D_t = 0^m,400$ Section normale de son aubage à la sortie, $S_t = 0^{m2},0412$; d'où, $\frac{S_t}{S} \frac{0,0412}{0,0314} = 1,31$, ce qui est un peu exagéré, peut-être.

Il faut, en vérification, appliquer aux circonstances de cette installation les équations (19), (20), (21) et (22) de la hauteur et du travail d'élévation statique, d'après les données expérimentales de chaque opération. A cet effet, pour établir des calculs de base, je choisis l'expérience n° VIII du tableau B, comme ayant un caractère plus officiel, dirigée et contrôlée qu'elle a été, par M. Couronne, personnellement.

D'après le tableau, cette expérience VIII accuse par la vanne A d'évacuation ouverte en grand, c'est-à-dire prêtant une section $S = S_r = 0^{m2},0314$, un débit $Q_p = 97$ litres à la seconde ; ce qui donne la vitesse de l'eau à la sortie,

$$V = \frac{0,097}{0,031.4} = 3^m,089, \text{ dont le carré } V^2 = 9,542.$$

Ensuite, d'après le nombre de tours N = 638, de cette même expérience, on a la vitesse angulaire

$$\omega = 0,10466 \times 638 = 66^m,777,$$

et

$$\omega R_1 = 66,777 \times 0,2 = 13^m,355 ;$$

puis, on obtient la hauteur statique que la pompe atteint à cette allure, par l'application de l'équation (25), qui donne :

$$H_s = \frac{\omega^2 R_1^2}{2g} = \frac{13,355^2}{19,62} = 9^m,090.$$

Telle est la valeur à laquelle doit satisfaire la somme des dix termes de seconds membres des équations (19) et (20), qu'il s'agit de décomposer et d'évaluer en justification. Pour cela, on posera en développement, comme suit :

1° La hauteur d'élévation réelle utile, indiquée, $H = 6^m,520$; c'est le terme.................... N° 1 (H de 19)

Et maintenant il faut calculer, chacun par sa formule, les neuf termes de la parenthèse de (20), facteurs de $V^2 = 9,542$; ce qui amène successivement :

2° Facteur, perte de charge due à la vitesse emportée par l'eau évacuée, $\frac{1}{2g} = \frac{1}{19,62} =$ **0,051**.......... N° 2 (h_e »)

3° Facteur, perte de charge, due à l'amortissement de tout ou partie de la vitesse de l'eau à l'aspiration, estimé en moyenne à la moitié de la précédente, soit (à introduire en parenthèse) $\frac{0,051}{2} =$ **0,0255**, N° 3 (h_{va} »)

Facteurs des pertes de charge dues aux frottements dans les tuyaux droits :

4° A l'aspiration, on a pour les tuyaux de 0,250 de diamètre d'après la table Darcy-Claudel de l'*Aide-Mémoire*, $\alpha_a = 3,7052$; d'où il vient par les valeurs numériques : $L_a \times \alpha_a \times S^2 = 12^m,70 \times 3,7052 \times 0,000986 =$ **0,0464**, N° 4 (h_a »)

5° Au refoulement, pour des tuyaux de 0,200, on a, d'après la même table : $\alpha_r = 11,571$; d'où $L_r \times \alpha_r \times S^2 = 3^m,270 \times 11,571 \times 0,000986 =$ **0,0373**, N° 5 (h_r »)

6° Pour les orifices du tambour mobile on a dix orifices se partageant une section $S_t = 0,0412$, ce qui fait, pour chacun d'eux, $\frac{S_t}{10} = 0,00412$; section qui correspond à un diamètre $d = \sqrt{1,273 \times 0,00412} = 0^m,072$, soit $0^m,070$, auquel correspond une valeur $\alpha_0 = 2666,1$. Le périmètre du tuyau de 72 millimètres est $3,14 \times 72 = 225$ millimètres ; les orifices rectangulaires mesurant 75×55, le périmètre en est $2(75 + 55) = 260$ millimètres ; par suite, le α_t applicable est $\alpha_t = 2666,1 \times \frac{260}{225} = 3080$. Ensuite on relève, sur le plan, la longueur approximative déve-

loppée d'un orifice, $l = 0,160$; et l'on obtient

$l \times \alpha_l \times \frac{S^2}{10} = 0,160 \times 3080 \frac{0,000986}{10} = \ldots\ldots$ **0,0486**, N° 6 (h_l de 19)

Facteurs des pertes de charge dues à la résistance des coudes :

7° Pour les deux coudes au $\frac{1}{8}$ et au $\frac{1}{16}$ à l'aspiration, on a environ :

$2 \times \frac{S^2}{S^2_a} \times \frac{0,145}{19,62} \times \frac{45}{90} = \frac{0,000986}{0,002401} \times 0,00738 =$ **0,0030**, N° 7 (h_{ca} »)

8° Pour le coude au $\frac{1}{4}$ du refoulement, on a

$\frac{S^2}{S^2} \times \frac{0,145}{19,62} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **0,0074**, N° 8 (h_{cr} »)

9° Pour le facteur de la perte de charge due au coude spiraliforme de l'enveloppe du tambour, lequel doit prendre rang, malgré qu'on ne puisse l'obtenir que par approximation, on relève sur le plan de la pompe : rayon moyen de ce coude $\rho = 0,250$, puis son angle au centre, environ 240°. La section est ménagée pour avoir une vitesse constante, égale à celle qui a lieu dans l'orifice d'évacuation final, ce qui autorise à admettre pour la moyenne section S_s de ce coude, la valeur de la section S de cet orifice et son diamètre 0,200, afin d'être plutôt au-dessus de la vérité. De ces données on conclut par les valeurs numériques :

$$\frac{1}{2g}\left[0,131 + 1,847\left|\frac{D}{2\rho}\right|^{7/2}\right]\frac{240}{90}$$
$$= 0,051\left[0,131 \times 1,847\left(\frac{0,200}{0,500}\right)^{7/2}\right]\frac{240}{90} =$$ **0,0278**, N° 9 (h_{cs} »)

Nota : *La somme des 3°, 6° et 9° termes, pour employer le langage de l'électro-technie, représente le facteur de la* **résistance intérieure** *propre, caractéristique, de la pompe ; lequel, par suite, a pour valeur au cas actuel,*

$R_i = 0,0255 + 0,0486 + 0,0278 = 0,102$. — **Appellation et chiffre à retenir.**

A l'aide de ces résultats de calculs, on peut reconstituer l'équation (20), qui ne comporte plus comme inconnue que le

10e terme, facteur des difficultés de circulation, de la parenthèse de second membre.

Désignons par Σ'_2, la somme des termes de cette parenthèse nos 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 ; on aura :

$$\Sigma'_2 = 0{,}0255 + 0{,}0464 + 0{,}0373 + 0{,}0486 + 0{,}0030 + 0{,}0074 + 0{,}0278 = 0{,}1960;$$

et l'on écrira :

$$H_s = H + 0{,}051V^2 + \Sigma'_2V^2 + V^2 \times 10^e \text{ terme};$$

d'où :

$$10^e \text{ terme} = \frac{H_s - (H + 0{,}051V^2 + \Sigma'_2V^2)}{V^2};$$

ce qui, avec les valeurs numériques, donne :

$$10^e \text{ terme} = \frac{9{,}090 - (6{,}520 + 0{,}051 \times 9{,}54 + 0{,}196 \times 9.54)}{9{,}54}$$
$$= \frac{9{,}090 - 8.876}{9{,}54} = \frac{0.214}{9{,}54} = 0{,}0224, \text{ N}^o\ 10\ [h_{ds} \text{ de } (19)].$$

On peut dès lors compléter la somme des facteurs de résistance à la circulation, en posant :

$$\Sigma_2 = 0{,}1960 + 0{,}0224 = 0{,}2184, \text{ soit } 0{,}220$$

alors l'équation (20), c'est-à-dire $H_s = H + 0{,}051V^2 + \Sigma_2V^2$, devenant l'équation expérimentale de condition,

$$(46) \qquad H_s = H + 0{,}051V^2 + 0{,}220V^2,$$

est satisfaite pour cette expérience prototype et donne définitivement en vérification :

$$H_s = 9{,}090 = 6^m{,}520 + 0{,}051 \times 9{,}54 + 0{,}220 \times 9{,}54$$
$$= 6^m{,}520 + 0^m{,}486 + 2^m{,}098 = 9^m{,}104.$$

Comme il a été expliqué au § 21, les calculs qui viennent d'être établis vont pouvoir servir pour opérer le contrôle de toutes les autres expériences.

Travail d'élévation statique. — On peut maintenant appliquer à cette même expérience l'équation (22), du travail d'élévation statique, $T_s = 1000\,SV(H + 0{,}051V^2 + \Sigma_2 V^2) = 1000SVH_s$, qui fournit avec les données numériques :

$$T_s = 1000 \times 0{,}0314 \times 3^m{,}090 \times 9^m{,}104 = 883 \text{ kilogrammètres.}$$

Calcul des termes n°s 11, 12 *et* 13 *de l'équation* (17) *du travail total dépensé.* — Pour retrouver le travail réel $T_r = 967K_t$, relevé au frein de Prony, qui a été dépensé dans cette expérience, il reste à apprécier les termes n°s 11, 12 et 13 de l'équation (17).

On peut obtenir immédiatement le terme n° 13, des *frottements mécaniques*. Pour cela, en procédant par l'ensemble des calculs complets et rigoureux, on a :

Le diamètre de la poulie de commande sur l'arbre de la pompe étant $0^m{,}280$, sa vitesse circonférentielle à 638 tours sera $V_p = 66{,}776 \times 0{,}14 = 9^m{,}35$; d'où la résistance tangentielle relative au travail total transmis,

$$R_t = \frac{967}{9{,}35} = 103^{kg}{,}43.$$

La tension frottante de la courroie est donnée, comme on sait, par la formule,

$$t = \frac{1{,}25 R_t}{e^{\frac{fs}{r}} - 1};$$

sachant que l'arc embrassé par la courroie sur la poulie est d'environ 160°, le coefficient de frottement du cuir étant admis égal à 0,25, l'exposant de e devient $\frac{f_s}{R_p} = \frac{0{,}25 \times 2\pi \times 140 \times 160^\circ}{360^\circ \times 0{,}14} = 0{,}697$; puis on a,

$$e^{\frac{fs}{r}} = e^{0{,}697} = 2{,}01, \quad \text{et} \quad 2{,}01 - 1 = 1{,}01\,;$$

alors on conclut : $t = \frac{1{,}25 \times 103{,}43}{1{,}01} = 128$ kilogrammes; puis la tension d'entraînement de la courroie

$$T_c = R_t + t = 103{,}43 + 128{,}00 = 231{,}43, \text{ soit } 232 \text{ kilogrammes.}$$

Le poids des pièces agissant sur le palier, tambour mobile, l'eau qu'il contient, son arbre et la poulie, est d'environ 90 kilogrammes. Avec ces

données, sur le schéma du tableau B, et par une simple épure graphique, on relève la résultante de l'effort frottant, diagonale de T_e et de p, $R_f = 227$ kilogrammes.

Le diamètre de l'arbre dans les fusées des paliers est de $0^m,046$; sa vitesse circonférentielle à 638 tours est de $66,776 \times 0,023 = 1^m,535$. Le coefficient de frottement étant pris égal à 0,10 pour les surfaces frottantes des paliers, on a finalement pour le terme f_m :

13e terme $f_m = 227^{kg} \times 0,10 \times 1,535 = \mathbf{35}$ kilogrammètres.

De là on conclut de (39), le coefficient δ, applicable à toutes les expériences suivantes ; c'est : $\delta = \frac{35}{967} = 0,03617$, soit **0,037**.

On peut maintenant obtenir en bloc la valeur du travail représenté par les 11e et 12e termes f_t et f_t' de (17) ; c'est-à-dire le travail du frottement particulier du seul tambour mobile tournant dans l'eau. Il n'y a pour cela qu'à se reporter à l'équation (18), ainsi formulée : $T_r = T_s + f_t + f_t' + f_m$, de laquelle on tire $f_t + f_t' = T_r - (T_s + f_m)$; ce qui donne d'après les résultats acquis : $f_t + f_t' = 967 - (883 + 35) = 49$ kilogrammètres.

Il faut se rappeler maintenant encore, que, dans cette expérience, le robinet-jauge, r, aspirait de l'air au dehors ; ce qui indique clairement que les joues du tambour mobile tournaient dans un vide relatif ; les couronnes C (*fig.* 13), étant maintenues asséchées par l'effet de la contraction des veines fluides pénétrant dans les ouïes à l'aspiration. Par suite, le travail de 49 K_t, ci-dessus, ne peut être attribué qu'au seul frottement, dans l'eau, de la surface périphérique extérieure du tambour mobile, et, par suite, au seul terme n° 11, c'est-à-dire $f_t = 320 R_1 b_1 \varphi_1 (\omega R_2 - V)^3$, de l'équation (17) ; terme duquel on tire :

$$\varphi_1 = \frac{f_t}{320 R_1 b_1 (\omega R_2 - V)^3}.$$

D'après l'épure (*fig.* 14), on relève le périmètre de cette surface frottante périphérique, $b_1 = 0^m,188$, puis son rayon de rotation de moyenne distance, $R_2 = 0,202$, qui donne une

vitesse circonférentielle à 638 tours :

$$\omega R_2 = V_{r_2} = 66,777 \times 0,202 = 13^m,49.$$

La vitesse de circulation dans le coude spiraliforme étant la même que celle dans le tuyautage de refoulement, on a la vitesse frottante relative $\omega R_2 - V = 13^m,49 - 3^m,09 = 10^m,40$; et l'on trouve le coefficient de frottements :

$$\varphi_1 = \frac{49}{320 \times 0,202 \times 0,188 \times 10,4^3} = \frac{49}{12.152 \times 10,4^3} = 0,00366,$$

résultat qui semble bien justifier l'exactitude des valeurs de la formule de Darcy.

Rappel d'observations sur l'influence des frottements du tambour mobile dans l'eau. — A propos de ce dernier résultat, il y a lieu d'insister à nouveau sur l'influence du travail absorbé par les frottements du tambour mobile tournant dans l'eau. — Comme le confirme bien l'expérience, ce travail croît comme le cube de la vitesse relative ($\omega R_2 - V$). Il est donc d'un grand intérêt de donner à la vitesse V, dans le coude d'enveloppe, la plus grande valeur possible compatible. De là la raison majeure, déjà citée, de donner à ce coude un tracé spiraliforme, tel que la vitesse de l'eau y soit à peu près uniforme, et au moins égale à celle qui a lieu dans le tuyautage de refoulement. — Ainsi, si le tambour mobile de la pompe expérimentée, au lieu d'avoir un coude en spirale, avait été entouré d'un anneau de section partout égale à celle du tuyau de refoulement, la vitesse moyenne de circulation, au lieu de $3^m,09$, y aurait été de $1^m,55$ environ; alors la vitesse relative frottante (ωR_2 — V) aurait été réduite à $13^m,49 - 1,55 = 11,93$, au lieu de $10^m,40$, comme ci-dessus; et le travail de frottement serait devenu $49\ K_t \times \frac{11,93^3}{10,40^3} = 71\ K_t$ au lieu de $49\ K_t$. — Ces chiffres ont leur éloquence : ils font voir combien l'augmentation du travail perdu est rapide dans cet ordre de choses.

Quant aux observations relatives à cet expérience VIII, consignées au tableau rédigé en 1883, elles concernent le *caput*

mortuum des 11e, 12e et 13e termes de l'équation (17) ; *caput mortuum* que, d'après le dire expérimental d'alors, j'admettais être un pourcentage constant, proportionnel au travail total dépensé par une même pompe pour tous ses débits, à toutes ses allures : on peut voir déjà, et l'on verra encore mieux par les expériences du fonctionnement à valve A étranglée, qu'il n'en peut rien être. — Cette conception est donc fausse et doit être rejetée.

Telle est l'analyse complète de l'expérience quasi-officielle du tableau B, faite conformément aux règles de la théorie statique qui vient d'être exposée.

Il s'agit maintenant d'appliquer cette même théorie aux expériences du tableau qui peuvent se comparer à l'expérience VIII, c'est-à-dire les expériences nos I, IV, VI et VII, faites dans des conditions de vitesses de rotation du tambour mobile entraînant l'aspiration au vide du robinet-jauge *r*, avec l'ouverture en grand de la vanne de décharge A.

Analyse de l'expérience VII. — Nous commencerons par l'expérience VII qui présente le plus grand écart dans le nombre de tours.

Cette expérience accuse un débit de 111 litres par la section $S = 0^{m2},0314$, prêtée par la vanne A ; ce qui donne une vitesse d'évacuation de

$$V = \frac{111}{31,4} = \mathbf{3,535}, \text{ dont le carré } V^2 = \mathbf{12,496}.$$

Le nombre de tours porté étant de 659, on a :

$$\omega = 0,10466 \times 659 = \mathbf{68,97}, \quad \text{et} \quad \omega R_1 = V_{c1} = 68,97 \times 0,2 = \mathbf{13,80};$$

puis $H_s = \dfrac{13,80^2}{19,62} = \mathbf{9^m,700}$. — Le tableau indique une hauteur d'élévation effective $H = \mathbf{6,50}$.

L'équation expérimentale de condition (46), ci-dessus, en faisant

$$\Sigma_1 + 0,051 = \Sigma = 0,220 + 0,051 = \mathbf{0,271},$$

donne en vérification : $H'_s = 6,50 + 12,496 \times 0,271 = 9^m,880$ à rapprocher de $9^m,700$, calculés ; — d'où une différence $\Delta = 9^m,88 - 9,70 = + \mathbf{0^m,18}$, accusée par l'expérience contre le résultat des formules (25) et (32).

Si l'on admet la valeur $H_s = 9^m,70$, l'équation (32) donne :

$$V^2 \times 0,271 = 9^m,70 - 6^m,50 = 3^m,20 \text{ ; d'où l'on tire, } V = \sqrt{\frac{3,20}{0,271}} = 3^m,435,$$

et le débit ne devrait plus être que $Q_p = 3{,}435 \times 31{,}4 = 108$ litres, au lieu de 111 portés au tableau. Anomalie accidentelle d'observation, qu'il a y lieu de dégager en adoptant **108** litres, et $H_s = 9^m{,}70$; d'après cela, le coefficient de rendement de 0,628 du tableau deviendra 0,61 ; ce qui est probablement plus près de la vérité.

Frottements mécaniques. — Pour les frottements mécaniques on a, d'après le travail indiqué au frein, $T_r = 1147 K_t$, porté au tableau :

$$f_m = 1147 \times 0{,}037 = 43 k_t.$$

Alors on conclut la valeur du 11[e] terme :

$$f_t = 1147 - (108 \times 9{,}70 + 43) = 56 k_t.$$

En appliquant à ces $56 K_t$ la formule pour trouver le coefficient φ_1, on a d'abord $\omega R_2 = 68{,}97 \times 0{,}202 = 13^m{,}93$; et :

$$\omega R_2 - V = 13{,}930 - 3{,}435 = 10{,}5 ;$$

d'où :

$$\varphi_1 = \frac{56}{12.152 \times 10{,}53} = \frac{56}{14017} = \mathbf{0{,}00399},$$ à comparer avec 0,00366 de VIII.

Analyse de l'expérience VI. — On a ici un débit de 98 litres ; d'où :

$$V = \frac{98}{31{,}4} = 3^m{,}12, \quad \text{et} \quad V^2 = 9{,}74.$$

Le nombre de tours 648 donne : $\omega = 0{,}10466 \times 648 = \mathbf{67{,}780}$; puis

$$\omega R_1 = 67{,}78 \times 0{,}2 = 13{,}55 ;$$

de là on conclut : $H_s = \dfrac{13{,}55^2}{19{,}62} = 9^m{,}358$. – La hauteur effective étant $H = 6^m{,}530$, il vient en vérification expérimentale :

$$H'_s = 6{,}53 + 9{,}74 \times 0{,}271 = 6{,}53 + 2{,}64 = 9{,}164,$$

ce qui donne une différence négative $\Delta = 9{,}164 - 9{,}358 = -\mathbf{0{,}194}$, à l'encontre de $+ 0{,}180$ pour VII.

Si l'on admet comme étant plus vraie la valeur $H_s = 9^m{,}358$, il vient comme ci-dessus :

$$V^2 \times 0{,}271 = 9^m{,}558 - 6{,}530 = 2^m{,}828, \text{ et } V = \sqrt{\frac{2{,}828}{0{,}271}} = 3^m{,}23 ;$$

et le débit aurait dû être $Q_p = 3{,}23 \times 31{,}4 = \mathbf{101{,}4}$ litres ; et le rendement de 0,615 du tableau serait 0,637 ; ce sont ces derniers chiffres qu'il y a lieu d'adopter.

Frottements mécaniques. — Le tableau porte consigné, un travail relevé au frein $T_r = 1040 k_t$; d'où l'on tire $f_m = 1040 \times 0{,}037 = 38{,}5 k_t$.

Alors il vient pour la valeur du 11e terme :

$$f_t = 1040 - (101,4 \times 9,358 + 38,5) = \mathbf{53}k_t.$$

Pour appliquer la formule déterminant φ_1, on a :

$\omega R_2 = 67,78 \times 0,202 = 13^m,69$; et $\omega R_2 - V = 13,69 - 3,23 = 10^m,46$;

et l'on trouve :

$$\varphi_1 = \frac{53}{12,152 \times 10,46^3} = \frac{53}{13905} = \mathbf{0,00381},$$ à comparer avec 0,00366 et 0,00399.

Analyse de l'expérience I. — Les expériences I et IV étant identiques, nous n'en analyserons qu'une, l'expérience n° 1 par exemple. — D'après le tableau, on a $Q_p = \mathbf{96}$ litres ; d'où : $V = \frac{96}{31,4} = \mathbf{3^m,057}$ et $V^2 = \mathbf{9,34}$. — Le nombre de tours $N = 635$ donne $\omega = 0,10466 \times 635 = \mathbf{62,42}$; puis $\omega R_1 = 66,42 \times 0,2 = \mathbf{13^m,284}$; et l'on conclut $H_s = \frac{13,284^2}{19,62} = \mathbf{8,994}$. — La hauteur effective était à ce moment : $H = \mathbf{6^m,50}$. — Il vient alors en vérification expérimentale :

$$H'_s = 6,50 + 9,34 \times 0,271 = 6,50 + 2,53 = 9^m,03, \text{ pour } 8^m,994 ;$$

d'où une différence positive $\Delta = + \mathbf{0,036}$. — Comme précédemment, en admettant comme vraie la valeur $H_s = 8,994$, on aurait d'après (32) :

$$V^2 \times 0,271 = 8^m,994 - 6,50 = 2^m,494, \text{ et } V = \sqrt{\frac{2,494}{0,271}} = 3^m,03 ;$$

puis $$Q_p = 31,4 \times 3,03 = \mathbf{95^l,14}, \text{ au lieu de } 96.$$

Frottements mécaniques. — Le tableau indique $T_r = \mathbf{939}k_t$; d'où :

$$f_m = 939 \times 0,037 = \mathbf{34,7}k_t.$$

De là on conclut le 11e terme, $f_t = 939 - (95,14 \times 8,994 + 34,7) = \mathbf{49}k_t$. — Pour trouver φ_1, on a successivement :

$\omega R_2 = 66,42 \times 0,202 = 13^m,416$, et $\omega R_2 - V = 13,416 - 3,030 = 10^m,386$, et l'on obtient $\varphi_1 = \frac{49}{12,152 \times 10,38^3} = \frac{49}{13590} = \mathbf{0,00360}$.

La moyenne valeur de φ_1, pour les expériences qui viennent d'être traitées, ressort à 0,003765, soit $\varphi_1 = \mathbf{0,00380}$, valeur qu'il y a lieu d'adopter.

Les analyses expérimentales précédentes montrent qu'il y a un accord presque complet, par l'application de la théorie statique des pompes centrifuges. — Cette théorie conduit même à la rectification des anomalies d'observation ; elle est donc un guide sûr.

ANALYSES DES EXPÉRIENCES A VALVE A, ÉTRANGLÉE

Le tableau B porte une série de trois expériences à valve étranglée, que j'avais relevées par curiosité, pour me rendre compte si elles pouvaient établir un accord avec la conclusion à laquelle j'étais arrivé, dans mon premier mémoire de 1881 sur les pompes centrifuges : à savoir que le rendement, toutes choses égales d'ailleurs, devrait être le même à valve étranglée ou bien à valve ouverte en grand. Je fus assez désappointé en constatant qu'il y avait un écart grand, et allant grandissant, entre le fait expérimental et le résultat que j'avais alors prévu ; cela tient à des causes que je ne pus entrevoir tout d'abord, et que l'analyse qui va être faite va pouvoir indiquer.

Mais, avant d'entreprendre ces analyses, et à cause d'une corrélation que l'on apercevra par la suite, nous allons commencer par l'examen de l'expérience IX, rapportant les circonstances de l'établissement du niveau statique le plus élevé que permettait le tuyautage. Le tableau B, fait en 1883, porte des explications relatives à cette expérience qui ne sont qu'approximatives ; il faut préciser : d'abord, d'après le plan de la vanne A (*fig.* 15, Pl. II), on voit que le niveau statique établi, qui se maintenait très fixe, a eu seulement une hauteur $H'_s = 6^m,52 - 0^m,08 =$ **6,44**. — Le nombre de tours de la pompe qui était de $N =$ **559** fournit $\omega = 0,10466 \times 559 =$ **58^m,471** ; puis $\omega R_1 = 58.471 \times 0,200 =$ **11^m,694** et $H_s = \dfrac{11,694^2}{19,62} =$ **6^m,970** ; d'où une différence négative $H'_s - H_s = \Delta = 6^m,44 - 6,97 =$ **—0,53**. — A quelle cause attribuer une différence aussi sensible ?

Le robinet-jauge *r*, au lieu d'aspirer au vide, comme dans les expériences précédentes, donnait alors un jet d'eau tendu ; ce qui prouve qu'il y avait, dans les ouïes, rentrée d'une certaine quantité d'eau faisant la navette à travers l'aubage du tambour mobile.

Si l'on se reporte au plan de la pompe (*fig.* 13, Pl. II), on peut estimer la section du passage que pouvaient offrir les

joints de ce tambour à leur arrivée aux ouïes. Ces joints ne prêtaient pas plus de un demi-millimètre de jeu. La circonférence des ouïes à $0,24 \times 3,14 = 0^m,754$, par suite la section des deux joints aboutissants est de $0,754 \times 0,001 = 0,0007,54$ centimètres carrés.

Le tuyau de refoulement donnait sur le centre de la pompe une charge de $2^m,80 - 0,08 = 2^m,72$, laquelle engendre une vitesse d'écoulement $V = \sqrt{19,62 \times 2,72} = 7^m,31$. Il faut admettre, au plus, un coefficient de dépense de 0,50 pour une pareille section. D'après ces données, il y avait ainsi, au maximum, une rentrée d'eau de $7^m,31 \times 0,000754 \times 0,5 =$ **2 3/4** à **3** litres par seconde de ce seul chef, ce qui ne peut en rien justifier une perte de charge de $0^m,53$. — C'est là un phénomène de difficile explication, dont cette rentrée d'eau a été probablement la cause. J'appelle plus particulièrement l'attention sur ce fait, car nous allons lui trouver de la permanence.

Maintenant, dans les analyses qui vont suivre, il ne sera pas tenu compte des contractions dans les orifices d'écoulement; leur influence étant négligeable au point de vue de la comparaison des résultats.

Analyse de l'expérience II du tableau B. — Dans cette expérience, la vanne A prêtait une ouverture de $0^m,075$ de hauteur, soit une section $S' = 0,075 \times 0,200 =$ **0,015**, dont le carré $S'^2 =$ **0,000225**, au lieu de la section maximum $S = 0,0314$, dont le carré $S^2 = 0,000986$.

Le débit relevé de **65,4** litres par seconde donne une vitesse d'évacuation $V = \frac{65,4}{15} =$ **4^m,36**, dont le carré est $V^2 =$ **19,01**. — Le nombre de tours indiqué $N = 648$, comme à l'expérience VI, donne $H_s =$ **9^m,358**. — A la suite de manœuvres au barrage de Suresnes, le plan d'eau de la Seine, lors des expériences qui nous occupent, était baissé de $0^m,10$, ce qui portait l'élévation réelle à une hauteur $H =$ **6^m,60**.

A l'aide de l'équation (26)(§21), c'est-à-dire $H_s = H + \frac{V^2}{2g} + \Sigma_2 \times V^2 \times \frac{S'^2}{S^2}$, et de l'équation de condition expérimentale (46) ci-dessus, c'est-à-dire $H_s = H + 0,051 V^2 + 0,220 V^2$, on obtient en vérification, par la substitution des valeurs numériques :

$$H'_s = 6,60 + 0,051 \times 19,01 + 0,220 \times 19,01 \times \frac{225}{986} = 6,60 + 0,969 + 0,958 = \mathbf{8^m,527};$$

d'où une différence négative $H'_s - H_s = \Delta = 8{,}527 - 9^m{,}358 = -$ **0,831** ; perte de charge supplémentaire, à rapprocher de $\Delta = -0{,}53$, de l'expérience IX. — A cette allure de la pompe, le robinet-jauge r donnait un jet d'eau bien accusé ; il y avait donc rentrée d'eau aux ouïes ; et il est à remarquer que cette perte de charge $\Delta = 0{,}831$ se constate en même temps que la rentrée d'eau. — La hauteur $H'_s = 8^m{,}527$ ne doit être considérée que comme une hauteur statique fictive. — Sans cette anomalie, on aurait dû avoir d'après l'équation (26) :

$$H_s - H = 9{,}358 - 6{,}600 = 0{,}051 V'^2 + 0{,}220 V'^2 \times \frac{225}{986};$$

ou :

$$2^m{,}758 = 0{,}101 V'^2; \qquad \text{d'où :} \qquad V' = \sqrt{\frac{2{,}758}{0{,}101}} = \mathbf{5^m{,}224};$$

et le débit eût été $Q'_p = 0{,}015 \times 5^m{,}224 = 78{,}36$ litres, au lieu de 65,4 litres : soit un déficit de $78{,}36 - 65{,}40 =$ **12^{lit},96** *dans le débit pratique possible :* résultat bien extraordinaire et pourtant réel.

Travail d'élévation statique. — Maintenant faisons le décompte : 65,4 litres d'eau ont été élevés à $9^m{,}358$; c'est le travail statique réel :

$$T_s = 65{,}4 \times 9{,}358 = \mathbf{612} k_t;$$

le travail statique fictif est $T'_s = 65{,}4 \times 8{,}527 = 557{,}66$; d'où une différence $612 - 557{,}66 = 54{,}34 k_t$, et l'on trouve évidemment que $54{,}34 = 65{,}4 \times 0{,}831$. — Cette différence inexplicable, dans le travail d'élévation statique, est donc relative à la perte de charge apparente qui se manifeste quand il y a rentrée d'eau aux ouïes. (Certainement quelque chose d'anormal se passe là : l'eau aspirée doit, dans le tambour mobile, batailler avec le théorème de Bernoulli et la pression atmosphérique.)

Travail total dépensé. — Pour décomposer le travail total dépensé porté au tableau, $T_r =$ **847**k_t, il faut estimer les 11e, 12e et 13e termes de l'équation (17). — Par le coefficient expérimental $\delta = 0{,}037$, on obtient le 13e terme $f_m = 847 \times 0{,}037 =$ **31,34**k_t. Alors, pour les 11e et 12e termes on a : $f_t + f_t' = 847 - (612 + 31{,}34) =$ **204,66**k_t. — Dans ces $204{,}66 k_t$, il faut faire la part de chacun des termes f_t et f_t' ; car, le robinet-jauge ayant indiqué que les joues du tambour mobile étaient noyées, il s'ensuit qu'elles doivent comporter leur travail absorbé, de frottement dans l'eau.

Les formules à appliquer sont, d'après (17) (§ 16) :

$$f_t = 330 R_1 b_1 \varphi_1 (\omega R_2 - V)^3 \qquad \text{et} \qquad f'_t = 128 \varphi_2 (R_3^5 - R_0^5)\,\omega^3.$$

D'après les calculs de l'expérience VI, on a d'abord, pour la vitesse à la surface périphérique, $\omega R_2 =$ **13^m,69**. — La vitesse de circulation dans le coude d'enveloppe est de $4^m{,}36 \times \frac{15}{31{,}4} =$ **2^m,08**. — De là, la vitesse frottante relative à cette surface : $\omega R_2 - V'' = 13{,}69 - 2{,}08 =$ **11^m,61**,

dont le cube est $V'_{f}{}^{3} = \mathbf{1565}$. Alors, avec le coefficient $\varphi_1 = 0{,}00380$, trouvé plus haut, il vient de ce chef :

$f_t = 320 \times 0{,}202 \times 0{,}188 \times 0{,}00380 \times 1565 = 0{,}04\ 2 \times 1565 = \mathbf{72{,}30} k_t$.

— De là on conclut : $f_t' = 204{,}66 - 72{,}30 = \mathbf{123{,}36} k_t$, qui représentent le travail du frottement des joues dans l'eau entre R_0 et R_1 ; car, dans l'ouverture des ouïes, la résistance a déjà été comptée comme frottement de glissement dans la somme Σ_2. — Sur le plan (*fig.* 13), on relève $R_3 = 0{,}215$, dont la 5e puissance est $R_3^5 = 0{,}000459$; puis $R_0 = 0{,}12$, dont la 5e puissance est $R_0^5 = 0{,}0000249$; R_3^5 — d'où : $R_0^5 = \mathbf{0{,}000434}$. — Puis on établit le coefficient $\gamma = 128 \times 0{,}000434 \times \varphi_2 = 0{,}0555 \varphi_2$. — Alors de $f_t' = 0{,}0555 \varphi_2 \omega^3$, on tire $\varphi_2 = \dfrac{f_t}{0{,}0555 \omega^3}$; ce qui, en substituant, donne pour cette expérience :

$$\varphi_2 = \frac{132{,}36}{0{,}0555 \times 67{,}78^3} = \frac{132{,}36}{17297} = \mathbf{0{,}00767}.$$

Par la formule de Darcy, on a pour la fonte neuve $\varphi_2 = 0{,}0050$, et pour la fonte raboteuse, de vieil usage, $\varphi_2 = 0{,}0100$. Si l'on remarque sur le plan de la pompe les irrégularités du profil des joues du tambour mobile, et les noyaux des goussets de l'aubage, qui, traversant de part en part, doivent produire des déchirements dans l'eau, on peut concevoir que le coefficient trouvé, $\varphi_2 = 0{,}00767$, rentre dans des conditions pratiques rationnelles.

Ainsi voilà bien justifiée cette énorme perte de travail due au seul frottement du tambour mobile tournant dans l'eau ; lequel s'élève pour cette expérience au quart du travail total dépensé. Les praticiens, jusqu'alors, ne semblent pas estimer à sa juste valeur la grandeur que prend cette perte en général. Il est certain que les médiocres rendements des pompes centrifuges aux grandes hauteurs d'élévation, surtout avec les débits réduits, tiennent principalement à cette cause.

Quant à la perte de travail qui pourrait provenir du fait des rentrées d'eau aux ouïes, elle est plus ou moins négligeable. Voici comment on peut en envisager l'estimation :

On vient de trouver, ci-dessus, que le débit aurait dû être de 78,36 litres ; ce qui aurait entraîné un travail d'élévation statique :

$$T_s = 78{,}36 \times 9^{m}{,}358 = \mathbf{733{,}3} k_t.$$

— Le travail absorbé par les frottements du tambour mobile garde sa même valeur $f_t + f_t' = \mathbf{204{,}66} k_t$. D'où l'on déduit :

$$T'_r = 733{,}3 + 204{,}66 = 938 k_t.$$

Par l'équation (37) (§ 23 et § 25), on a $\delta' = 0{,}0385$; ce qui permet de déterminer $f_m = T_r' \delta' = 938 \times 0{,}0385 = \mathbf{36{,}11} k_t$; et l'on conclut d'après l'équation (18) (§ 17) ; c'est-à-dire $T_r = T_s + f_t + f_t' + f_m$:

$$T_{r1} = 733{,}30 + 204{,}66 + 36{,}11 = \mathbf{974{,}07} k_t.$$

— Le travail utile, dans ce cas, aurait été : $T_{u_1} = 78{,}36 \times 6{,}60 = \mathbf{517{,}17} k_t$.
Et il serait résulté un coefficient de rendement $K_{r_1} = \frac{517{,}17}{974{,}07} = \mathbf{0{,}53}$, au lieu de **0,51**, porté au tableau B, d'où une différence, somme toute, minime, de 2 0/0, en manque de gagner plutôt, qui s'efface devant l'influence prépondérante des frottements du tambour mobile tournant dans l'eau. — Par suite, le plus grave inconvénient des rentrées d'eau aux ouïes est surtout l'incertitude apportée dans l'estimation du débit pratique possible, par les perturbations plus ou moins arbitraires qu'elles lui font subir en le diminuant. Dans ces cas de la pratique, on ne sait plus sur quoi compter.

Analyse de l'expérience III, du tableau B (Pl. IV). — Dans cette expérience, la vanne A prêtait une ouverture de $0^m{,}065$ de hauteur, par suite une section $S' = 0{,}065 \times 0{,}2 = \mathbf{0^m{,}013}$, dont le carré $S'^2 = \mathbf{0{,}000169}$.

Le débit relevé de **53,80 litres** donne une vitesse d'évacuation

$$V' = \frac{53{,}8}{13} = \mathbf{4^m{,}14}, \text{ dont le carré est } V'^2 = \mathbf{17{,}14}.$$

Le nombre de tours indiqué, $N = \mathbf{636}$, donne $\omega = \mathbf{66^m{,}563}$, dont le cube, $\omega^3 = \mathbf{294930}$; puis on trouve $\omega R_1 = 66{,}563 \times 0{,}2 = \mathbf{13^m{,}31}$; d'où l'on tire : $H_s = \frac{13{,}31^2}{19{,}62} = \mathbf{9^m{,}029}$. — En vérification expérimentale, il vient :

$$H'_s = 6{,}60 + 0{,}051 \times 17{,}14 + 17{,}14 \times 0{,}220 \times \frac{169}{986} = 6{,}60 + 0{,}874 + 0{,}650 = 8^m{,}125 ;$$

d'où une perte de charge négative, $H'_s - H_s = \Delta = 8{,}125 - 9{,}029 = -\mathbf{0{,}904}$, à rapprocher de $\Delta = -0{,}831$, de l'expérience II. — Le robinet-jauge r donnait un fort jet d'eau. — Pour satisfaire à l'équation (26), on devrait avoir :

$$H_s - H = 9{,}029 - 6{,}60 = 2^m{,}429 = 0{,}051 V'^2 + V'^2 \times 0{,}220 \times \frac{169}{986} = 0{,}0887 V'^2 ;$$

d'où :
$$V' = \sqrt{\frac{2{,}429}{0{,}0887}} = \mathbf{5^m{,}250} ;$$

et le débit eût été de $5^m{,}25 \times 0^{m2}{,}013 = 68{,}25$ litres, au lieu de 53,8 litres, ce qui fait *un déficit de 14,45 litres, dans le débit pratique possible !* — A rapprocher du déficit de 12,96 litres de l'expérience II, précédente.

Travail d'élévation statique. — Le travail réel d'élévation statique a donc été $T_s = 53{,}8 \times 9{,}029 = \mathbf{485{,}76} k_t$, et le travail d'élévation statique fictif $T'_{s_1} = 53{,}8 \times 8{,}125 = 437{,}12 k_t$; de sorte que la différence

$$485{,}76 - 437{,}12 = \mathbf{48{,}64} k_t = 53{,}8 \times 0{,}904,$$

représente le travail non manisfesté, dû à l'influence probable des rentrées d'eaux aux ouïes.

Travail total dépensé $T_r = \mathbf{691} k_t$. — Pour décomposer ce travail, indépendamment du travail statique réel qui vient d'être calculé, on obtient directement le 13ᵉ terme $f_m = 691 \times 0{,}037 = \mathbf{25{,}5} k_t$; de là on tire $f_t + f'_t = 691 - (485{,}76 + 25{,}5) = \mathbf{179{,}74}\ k_t$, pour représenter le travail absorbé, des 11ᵉ et 12ᵉ termes de (17). En se reportant aux calculs correspondants de l'expérience II, ci-dessus, on établit successivement :

$$\omega R_2 = 66{,}56 \times 0{,}202 = \mathbf{13^m{,}445}.$$

— La vitesse de l'eau dans le coude d'enveloppe est :

$$4^m{,}14 \times \frac{13}{31{,}4} = \mathbf{1^m{,}714} = V_{cs},$$

et l'on a : $\omega R_2 - V_{cs} = 13{,}445 - 1{,}714 = \mathbf{11^m{,}731}$, dont le cube est 1615 ; alors avec le coefficient $\varphi_1 = 0{,}00380$, on obtient $f_t = 0{,}0462 \times 1615 = \mathbf{74{,}60} k_t$; ce qui amène : $f'_t = 179{,}74 - 74{,}60 = \mathbf{105{,}14} k_t$; valeur dont on tire : $\varphi_2 = \frac{105{,}14}{0{,}0553 \times 66{,}563^3} = \frac{105{,}68}{16368} = \mathbf{0{,}00642}$; à rapprocher de $\varphi_2 = 0{,}00767$ de II. Il y a une petite anomalie par défaut.

Analyse de l'expérience III ***bis***. — Dans cette expérience, la vanne A ouvrait de 0ᵐ,040 de hauteur, prêtant ainsi une section :

$$S' = 0^m{,}04 \times 0{,}2 = \mathbf{0^{m2}{,}0080}, \text{ dont le carré } S'^2 = \mathbf{0{,}000064}.$$

— Le débit relevé de **43,06 litres** donne une vitesse d'écoulement, $V' = \frac{43{,}06}{8} = \mathbf{5^m{,}38}$, dont le carré $V'^2 = \mathbf{28{,}94}$. — A 642 tours, on a : $\omega = \mathbf{67^m{,}20}$, dont le cube est 303460 ; puis on a : $\omega R_1 = 13^m{,}438$, et de là : $H_s = \frac{13{,}438^2}{19{,}62} = \mathbf{9^m{,}193}$. — Alors on trouve en vérification expérimentale :

$$H'_s = 6{,}60 + 0{,}051 \times 28{,}94 + 28{,}94 \times 0{,}22 \times \frac{80}{986} = 6{,}60 + 1{,}476 + 0{,}517 = \mathbf{8^m{,}593};$$

d'où une différence négative $H'_s - H_s = \Delta = -\mathbf{0^m{,}600}$.

Le robinet-jauge *r* donnait un fort jet d'eau ; d'où rentrée d'eau aux ouïes. — Pour satisfaire à l'équation (26) (§ 21), on aurait dû avoir :

$$H_s - H = 9{,}193 - 6{,}600 = 2^m{,}593 = 0{,}051\,V'^2 + V'^2 \times 0{,}22 \times \frac{80}{986} = 0{,}0688\,V'^2;$$

d'où $V' = \sqrt{\frac{2{,}593}{0{,}0688}} = \mathbf{6{,}14}$; et le débit eût été de $6^m{,}14 \times 0^{m3}{,}008 = 49{,}12$ litres, au lieu de 43,06 litres ; d'où une différence en moins, de :

$$49{,}12 - 43{,}06 = \mathbf{6{,}06\ litres},$$

dans le débit pratique possible.

Travail d'élévation statique. — Le travail d'élévation statique réel a été de $T_s = 43^{lit},06 \times 9^m,193 = \mathbf{395,80}k_t$, et le travail statique fictif de

$$T'_s = 43,06 \times 8,593 = \mathbf{370}k_t;$$

et la différence $395,8 - 370 = \mathbf{25,8}k_t$, représente le travail non manifesté, ayant pour cause probable les rentrées d'eau aux ouïes.

Travail total dépensé. — Par le travail total dépensé $T_r = \mathbf{640}k_t$, on trouve $f_m = 640 \times 0,037 = \mathbf{23,7}k_t$; puis :

$$640 - (395,80 + 23,70) = \mathbf{220,5}k_t = f_t + f'_t,$$

qui représentent le travail du frottement du tambour mobile dans l'eau ; c'est, pour cette expérience, plus du tiers du travail total dépensé. — Décomposons ce travail : en se reportant aux calculs correspondants des deux expériences précédentes, on a d'abord : $\omega R_2 = 67,2 \times 0,202 = \mathbf{13^m,57}$. — La vitesse dans le coude d'enveloppe est $V_{cs} = 5,38 \times \frac{8}{31,4} = \mathbf{1^m,37}$, d'où l'on tire $\omega R_2 - V_{cs} = 13,57 - 1,37 = \mathbf{12^m,20}$, dont le cube est **1816** ; et l'on conclut $f_t = 0,0462 \times 1816 = \mathbf{83,9}k_t$; puis on déduit :

$$f'_t = 220,5 - 83,9 = \mathbf{136,6}k_t;$$

d'où :

$$\varphi_2 = \frac{136,6}{0,0555 \times 67,2^3} = \frac{136,6}{16842} = \mathbf{0,00811},$$

valeur à comparer à : $\varphi_2 = 0,00767$, de II.

Analyse de l'expérience V, à vitesse réduite. — Dans cette expérience, la vanne A, étant ouverte en grand, prêtait l'ouverture maximum $S = \mathbf{0^m,0314}$. Le nombre de tours était réduit à $N = \mathbf{602}$. — Le robinet-jauge r donnait de l'eau, et, par suite, on avait à subir la perte de travail due aux frottements des joues du tambour mobile ; d'où il est résulté la grande baisse de rendement constatée. — Appliquons les calculs :

D'après les données du tableau B, on a $Q_p = \mathbf{60,5}$ litres ; ce qui, à l'évacuation, donne une vitesse $V = \frac{60,5}{31,4} = \mathbf{1^m,927}$, dont le carré, $V^2 = \mathbf{3,713}$.

Le nombre de tours 602 donne : $\omega = 0,10466 \times 602 = \mathbf{63^m,00}$, dont le cube $\omega^3 = \mathbf{250047}$. — Puis on a : $\omega R_1 = 63 \times 0,2 = 12^m,60$, ce qui donne :

$$H_s = \frac{12,60^2}{19,62} = \mathbf{8,090}.$$

La hauteur d'élévation réelle étant $H = \mathbf{6^m,53}$, l'équation de condition expérimentale (46) fournit en vérification :

$$H'_s = 6,53 + 3,713 \times 0,271 = \mathbf{7,536};$$

d'où une différence négative $H'_s - H_s = 7^m,536 - 8,090 = \mathbf{-\ 0,554}$, à rapprocher de 0,530 de IX.

Par l'application de l'équation (34) (§ 23), c'est-à-dire $V = \sqrt{\frac{H_s - H}{\Sigma}}$,

on aurait dû avoir : $H_s - H = 8{,}090 - 6{,}530 = 1^m{,}560 = 0{,}271\,V^2$; d'où :

$$V = \sqrt{\frac{1{,}560}{0{,}271}} = \mathbf{2{,}399};$$

et le débit aurait dû être : $Q_p = 2{,}399 \times 31.4 =$ **75,32** litres, d'où une différence, en moins, de $75{,}32 - 60{,}50 = 14{,}82$ litres, *dans le débit pratique possible!* — Il faut reconnaître que cette diminution dans les débits, coïncidant avec les rentrées d'eau aux ouïes, a eu une singulière permanence.

Travail d'élévation statique. — Le travail d'élévation statique a donc été :

$$T_s = 60{,}5 \times 8^m{,}09 = \mathbf{489{,}44}k_t, \text{ contre } T'_s = 60{,}5 \times 7^m{,}356 = 455{,}92k_t$$

de travail statique fictif; la différence, $489{,}44 - 455{,}92 = \mathbf{33{,}52} = 60{,}5 \times 0{,}554$, représente le travail non manifesté, ayant pour cause probable les rentrées d'eau aux ouïes.

Travail total dépensé. — Du travail total dépensé $T_r = \mathbf{728}k_t$, on tire :

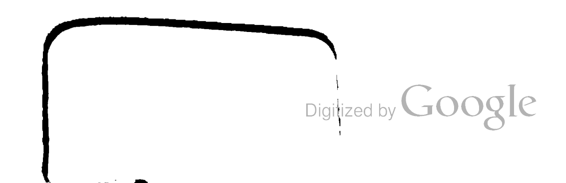
$$f_m = 728 \times 0{,}037 = \mathbf{26{,}93}k_t;$$

par suite, on a : $728 - (489{,}44 + 26{,}93) = \mathbf{211{,}63}k_s = f_t + f'_t$, travail des 11[e] et 12[e] termes de (17). — Ce travail se décompose : en se reportant aux précédents calculs, on a : $\omega R_2 = 63 \times 0{,}202 = 12^m{,}73$. La vitesse de l'eau dans le canal d'enveloppe étant de $1^m{,}927$, la vitesse frottante périphérique du tambour est : $\omega R_2 - V = 12{,}730 - 1{,}927 = \mathbf{10^m{,}803}$, dont le cube est **1259.** — Alors on a $f_t = 0{,}0462 \times 1259 = \mathbf{58{,}16}k_t$; ce qui fait conclure : $f'_t = 211{,}63 - 58{,}16 = \mathbf{153{,}47}$; résultat duquel on tire comme précédemment :

$$\varphi_2 = \frac{153{,}47}{0{,}0555 \times 63^3} = \frac{153{,}47}{13877} = \mathbf{0{,}0111};$$

chiffre qui semble indiquer une anomalie par excès : probablement une erreur de 1 kilogramme, environ, dans la tare du frein de Prony, au moment de l'expérience. Il y a lieu, je crois, d'écarter cette dernière valeur de φ_2.

La moyenne, donc, des trois premières valeurs de φ_2 ressort à : $=$ **0,0074,** valeur que l'on peut attribuer à ce coefficient de frottement pour les joues du tambour mobile expérimenté, dont le profil aurait besoin d'être modifié d'ailleurs. — Cette valeur correspond à la moyenne des coefficients Darcy-Claudel, pour fonte neuve, 0,005, et fonte d'usage courant, 0,010. — Avec des soins apportés au tournage des surfaces, ce coefficient devrait se réduire à **0,005.** On doit pouvoir y arriver; il y faut tendre.



28. Résumé. — Les calculs auxquels ont donné lieu les précédentes analyses permettent de présenter quelques observations qui comportent de multiples enseignements : En premier lieu, ils démontrent l'efficacité de la théorie statique des pompes centrifuges, et en assurent la base scientifique.

En second lieu, l'application de cette théorie à des données expérimentales consciencieuses a permis de constater ce qui suit :

1° Par la diminution des résistances à la circulation qui s'ensuivent, le bon montage, la bonne installation du tuyautage de desserte d'une pompe centrifuge, a une grande influence sur le travail moteur qu'elle exige, pour un effet à produire donné ; c'est une chose très importante, à laquelle il faut prêter la plus grande attention, attendu qu'il en résulte un gain permanent dans le rendement, toutes choses égales d'ailleurs ;

2° La prépondérance que prennent, dans des cas déterminés, les frottements mécaniques des surfaces des tambours mobiles tournant dans l'eau ; surtout quand, dans le plus grand nombre des systèmes de pompes, les joues de ces tambours, étant sans protection, sont forcément dans cette obligation. — Ainsi, par le système des joints de son tambour mobile avec les coquilles d'enveloppe, la pompe dont les expériences viennent d'être analysées, a pu, à partir d'une certaine allure, réaliser un vide relatif autour des joues de ce tambour ; ce qui améliorait le rendement mécanique de près de 10 0/0 ; il est certain que, sans la disposition spéciale de ces joints, ce résultat n'eût jamais été obtenu ;

3° Pour une même élévation effective, dans les cas de marche à valve d'écoulement final étranglée, ou à mouvement de rotation réduisant le débit au-dessous d'une certaine limite, ces mêmes expériences, pour la pompe dont il s'agit, ont mis en évidence, d'une manière manifeste, le singulier phénomène de diminutions très grandes dans les débits pratiques possibles ; diminutions qui ont coïncidé avec des rentrées d'eau aux

ouïes, venant de la colonne de refoulement. — Ce phénomène s'accuse, d'autre part, par des pertes de charge statiques supplémentaires, qui croissent avec les pressions établies par la pompe, c'est-à-dire avec les hauteurs statiques d'élévation, par suite, théoriquement, comme les ordonnées d'une certaine parabole. — Malheureusement les expériences en nombre restreint que je possède ne permettent pas d'établir cette loi d'une manière précise, mais elles suffisent néanmoins à indiquer le caractère de croissance dans le sens qui vient d'être énoncé.

A ce sujet encore, il y a lieu de remarquer que la disposition des joints du tambour mobile expérimenté a produit une action retardatrice très grande sur l'apparition du phénomène en question; car la tension centrifuge développée à la circonférence extérieure de rayon R_3 (*fig.* 13 et 14), à l'entrée du très petit jeu prêté par ces joints, ne laissait pas de gêner beaucoup la pénétration de l'eau. En effet : dans toutes les expériences rapportées, en outre du vide relatif créé par la contraction à l'entrée des veines liquides aux ouïes, il y avait sur le centre de la pompe, par le tuyautage de refoulement, une charge réelle, apparente, de $2^m,800$, capable d'engendrer une vitesse d'écoulement $V = \sqrt{19,62 \times 2,8} = 7^m,41$. Si la vitesse de circulation dans le canal d'enveloppe avait eu constamment cette valeur, cela aurait suffi pour empêcher toute rentrée d'eau; mais il était loin d'en être ainsi. Dans l'expérience n° 1, par exemple, le robinet-jauge *r* appelait encore au vide à 635 tours. Il y avait dans le coude d'enveloppe (Voir les calculs) une vitesse de circulation de $3^m,057$, laquelle a pour hauteur génératrice une colonne liquide de $\frac{3.057^2}{19,62} = 0^m,476$; il s'ensuit que l'obstruction causée par les joints représentait, pour le moins, une charge de $2^m,800 - 0,476 = 1,324$. Néanmoins, dans d'autres expériences, comme on a vu, il y a eu des ruptures d'équilibre qui ont permis des rentrées d'eau. Il est encore à penser que, si le rayon R_3 avait été plus grand, l'apparition de ces rentrées d'eau eût été retardée d'autant.

Telle qu'elle était, cette disposition des joints, déjà bonne, cependant, n'a donc pas été toujours suffisante pour la protection des joues du tambour mobile expérimenté contre le noyage, et partant, pour empêcher les rentrées d'eau aux ouïes.

Maintenant à quoi attribuer le curieux phénomène dont il s'agit? — Est-ce à une cause semblable à celle qui, dans l'ajutage conique divergent de Venturi, fait que l'augmentation de dépense est supprimée par la présence de quelques trous capillaires percés autour de la petite section de raccordement des cônes? — Petite cause en apparence qui produit des effets considérables (Bresse, *Hydraulique*, 1879, p. 105). — Ou bien, le seul fait d'un très mince filet d'eau sous pression, attaquant plus ou moins normalement une veine fluide déjà contractée, a-t-il le pouvoir d'augmenter cette contraction ; de diminuer la vitesse dont cette veine est animée ; de jeter la perturbation dans l'équilibre hydrostatique et de chagriner le théorème de Bernoulli, etc.? — Personnellement j'aime mieux dire que je n'en sais rien, car c'est la vérité, et même une vérité qui me désole ; je ne puis que livrer les constatations que j'ai faites, sans plus de commentaires ;

4° Par suite des restrictions qu'apportent les phénomènes alternatifs qui viennent d'être signalés, des joues d'un tambour mobile tournant tantôt dans un vide relatif, tantôt tournant dans l'eau, et des pertes de charges statiques dues aux rentrées d'eau aux ouïes, il résulte que les conditions de vitesse d'évacuation de l'eau au dehors, correspondant au maximum de rendement, exprimé par l'évacuation (44) (§ 24), ne peuvent jamais être réalisées avec n'importe quel système actuel de pompes centrifuges.

Dans les pompes dont les joues des tambours mobiles sont plus ou moins protégées, comme celles dont les expériences viennent d'être analysées, le maximum de rendement a lieu pour la moindre vitesse de circulation, qui amène l'assèchement des couronnes C et fait que les joues de ces tambours

tournent dans un vide relatif. — Pour la pompe qui nous occupe, cette vitesse pratique : $V = 3^m,10$, du rendement maximum, obtenu avec 635 tours pour $6^m,53$ de hauteur d'élévation réelle, et pour $2^m,800$ de hauteur de colonne de refoulement, s'écarte notablement de la vitesse théorique $V = 1^m,560$, relative à 567-68 tours du Tableau A (§ 25), ci-dessus, lequel se rapporte à la même pompe, dans sa même installation. — Il est probable (la chose n'a pas été cherchée aux essais) que peu au-dessous de ce nombre de tours, N = 635, eût commencé l'inefficacité des joints latéraux, le noyage des joues, les rentrées d'eau aux ouïes, et une perturbation brusque dans le débit et le rendement se serait produite et aurait transformé, par diminution successive des nombres de tours N, la portion de courbe théorique *amn* (*fig.* 16, Pl. II), en une autre *am″n″*, plus ou moins arbitraire. — Et pour une hauteur plus grande de la colonne de refoulement, le point de rendement maximum eût été d'autant reculé sur la courbe théorique, à droite, vers un rendement moindre; cela pour arriver à la vitesse d'écoulement, permettant l'asséchement des couronnes C. — Il y a donc intérêt, dans tous cas, à réduire la colonne de refoulement à la moindre hauteur possible, compatible avec les autres conditions à remplir.

Voilà des choses que la théorie statique fait apercevoir et dont elle met les causes en évidence.

Pour des pompes ayant des joues de tambours non protégées, cette vitesse du maximum de rendement serait celle qui, dans le coude d'enveloppe, atténuerait le plus possible l'effet des rentrées d'eau aux ouïes, c'est-à-dire celle qui correspondrait à la colonne de refoulement comme hauteur génératrice ; car, dans ces systèmes, il faut nécessairement subir le frottement latéral des joues, il n'y a rien à gagner de ce côté. — Pour ce genre de pompes, encore à l'état sauvage, il est donc difficile de préciser leur allure de rendement maximum dans chaque application.

Assez généralement, dans les élévations ordinaires allant

jusqu'à 15 mètres, les praticiens, pour obtenir une allure de bon rendement, s'arrangent de manière à avoir, dans le canal d'enveloppe, une vitesse de circulation de l'eau dont la hauteur génératrice soit comprise entre 2,2 à 2,5 fois le diamètre de la tubulure de refoulement sur la pompe. — Cette règle empirique donne de bons résultats ; elle conduit d'abord à avoir une perte de charge J, uniforme pour tous les diamètres de tuyaux, ce qui rend les résultats d'expérience comparables pour des appareils divers. — Il est bon de ne pas trop s'écarter de cette règle.

QUATRIÈME PARTIE

DE L'APPLICATION DES POMPES CENTRIFUGES AUX GRANDES HAUTEURS D'ÉLÉVATION

29. Jusqu'alors les pompes centrifuges n'ont donné et ne donnent encore, pour les grandes hauteurs d'élévation, que de très faibles rendements, qui font généralement rejeter leur emploi dans la pratique à partir de 15 mètres. La théorie statique et les recherches expérimentales précédentes font voir que ce désavantage doit être attribué à la prépondérance qu'arrivent à prendre les pertes de travail, dues aux frottements dans l'eau, des surfaces des tambours mobiles : pertes qui croissent comme les cubes des vitesses circonférentielles de rotation. Il est certain que le champ d'application de ces pompes ne pourrait que s'agrandir, si l'on parvenait à atténuer suffisamment ces graves inconvénients. — De nombreuses recherches sont dirigées de ce côté ; il est d'actualité de s'en occuper.

Pour aborder les grandes hauteurs d'élévation, dépassant quelquefois 100 mètres, la pratique, pour diverses raisons, surtout pour la question des nombres de tours et des vitesses de courroies, dans les commandes par courroie, a été amenée à l'emploi de pompes conjuguées, accouplées par 2, par 3, par 4, etc., se partageant entre elles la hauteur d'élévation par moitié, par tiers, par quart, etc., au lieu de l'emploi de pompes uniques qui, elles, seraient d'une construction coûteuse et difficile, pour les petits débits principalement.

Quand on ne tient pas compte de la question des frottements des tambours mobiles, il est facile de démontrer que ces deux modes d'emploi doivent donner le même rendement mécanique, et même on arriverait à conclure que les pompes conjuguées seraient plutôt désavantageuses, ce qui est tout à fait le contraire de la vérité. — La théorie statique va nous éclairer à ce sujet, et nous faire toutes les révélations désirables.

A cet effet, pour éviter des longueurs démonstratives, nous allons rester sur le terrain des applications, en nous reportant à l'installation de la pompe du tableau B, à laquelle nous ferons élever l'eau à 30 mètres, avec une vitesse d'évacuation de 3 mètres, par une section de 0m,0314, soit un débit de $Q_p = 94,2$ lit. par seconde, et en admettant, par hypothèse, que ses organes mécaniques puissent s'y prêter. A cette intention, nous supposons 0m,050 de diamètre aux fusées de l'arbre, et 0m,400, à la poulie de commandé. De plus, nous ferons abstraction de l'influence, sur le débit, des rentrées d'eau aux ouïes, qui se produiraient nécessairement à cette pression élevée. — Enfin nous établirons deux pourcentages de rendement, comme au tableau A (§ 25) : l'un hypothétique, en admettant le seul frottement de la périphérie du tambour ; l'autre en admettant, en plus, le frottement de ses joues latérales.

Nous allons étudier cinq modes d'application de pompes à la solution du problème posé :

1° et 2° L'emploi de deux et de trois pompes conjuguées de $R_1 = 0,200$ de rayon de tambour mobile ;

3° L'emploi d'une pompe unique de même rayon $R_1 = 0,200$;

4° L'emploi d'une pompe unique, tournant au même nombre de tours que la solution n° 1, à deux pompes ;

5° L'emploi de deux pompes conjuguées tournant au même nombre de tours que la troisième solution à pompe unique.

Nous appliquerons, à ces cinq cas, les équations (17), (45) ou (45) *bis* (§ 16 et 25). — Les résultats des calculs nous condui-

ront aux conclusions cherchées. C'est, je pense, le plus court moyen d'y arriver.

1° Emploi de deux pompes conjuguées de $R_1 = 0{,}200$ de rayon du tambour mobile (*fig.* 13, Pl. II). — Pour élever l'eau à 30 mètres, avec l'installation du tableau B (Pl. IV), il suffit d'ajouter au refoulement une longueur de tuyaux $L = 30^m{,}00 - 6^m{,}50 = 23^m{,}50$, de $0^m{,}200$ de diamètre, plus une longueur de $2^m{,}50$, environ, de tuyaux droits raccordant le refoulement d'une pompe à l'aspiration de l'autre ; ce qui porte à **26** mètres la longueur supplémentaire des tuyaux droits de 0,200. — Ces tuyaux ajoutent à la somme $\Sigma = \mathbf{0{,}271}$, des facteurs de $V^2 = 9$ (Voir les calculs précédents de l'expérience VIII, du tableau B), leur part de résistance à la circulation générale, qui est $L\alpha S^2 = 26 \times 11{,}57 \times 0{,}000986 = \mathbf{0{,}2966}$. — Il faut ajouter aussi la résistance intérieure d'une deuxième pompe, c'est-à-dire $R_i = \mathbf{0{,}102}$, et la résistance de trois coudes à angles droits, du raccordement de refoulement à aspiration, c'est-à-dire $0{,}0074 \times 3 = \mathbf{0{,}0222}$. — Ce qui, au total, donne à Σ, pour ce cas, la valeur :

$$\Sigma = 0{,}2710 + 0{,}2966 + 0{,}1020 + 0{,}0222 = \mathbf{0{,}692},$$

qui s'applique à l'ensemble général.

Le travail utile, d'après le problème posé, est $T_u = 94^l{,}2 \times 30 = \mathbf{2826}$ kilogrammètres.

Ceci établi, l'équation $H_s' = H + \Sigma V^2$ donne :

$$H_s = 30 + 0{,}692 \times 9 = \mathbf{36^m{,}228},$$

dont la moitié, $\mathbf{18^m{,}114} = H'_s$, est la hauteur statique que chaque pompe doit atteindre. — D'après cela, on aura, par la formule (25) :

$$\omega = \frac{\sqrt{2gH'_s}}{R_1}, \text{ soit : } \omega = \frac{(19{,}62 \times 18{,}114)^{1/2}}{0{,}200} = \mathbf{94{,}25};$$

d'où le nombre de tours, $N = \dfrac{94{,}25}{0{,}10466} = \mathbf{900}\,1/2$. — A cause des deux pompes, et en ne considérant, en premier lieu, que le seul frottement périphérique du tambour, la formule (45 *bis*) (§ 25) devient :

$$T_r = 2\alpha V \frac{H}{2} + \alpha\Sigma V^3 + 2\beta(\omega R_2 - V)^3 + f_m = T'_r + f_m = T'_r + T'_r\delta',$$

dans laquelle, avec les données du problème, on a, sachant que $R_2 = 0{,}202$:

$$\alpha = 1000S = \mathbf{31{,}4}. - H = \mathbf{30^m{,}00}. - \Sigma = \mathbf{0{,}692}.$$
$$\beta = 320 \times 0{,}202 \times 0{,}188 \times 0{,}0038 = \mathbf{0{,}047}. - \omega R_2 = 94{,}25 \times 0{,}202 = \mathbf{19{,}038}.$$

— Puis par l'équation (37) (§ 23), on a $\delta' = \dfrac{0{,}225 \times 0{,}025}{0{,}200 - 0{,}225 \times 0{,}025} = \mathbf{0{,}029}$. —

Alors il vient avec les données numériques :

$$T_r = \frac{2826}{30 \times 31,4 \times 3^m} + \frac{586,70}{31,4 \times 0,692 \times 27} + \frac{387}{0,094\ (19,038 - 3)^3}$$

$$+ 0,029T'_r = 3800 + \frac{110}{0,029 \times 3800} = \mathbf{3910} k_t,$$

$$\text{et } K_r = \frac{T_u}{T_r} = \frac{2826}{3910} = \mathbf{0,722}.$$

Pour avoir le rendement en comptant les résistances totales, il suffit, en adoptant la valeur $\varphi_2 = 0,00703$, comme au tableau A (§ 25), d'ajouter à T_r ci-dessus, le double de la valeur du terme $f'_t = 128 \times 0,00703\,(R_3^5 - R_0^5)\omega^3$, qui, d'après les calculs indiqués audit tableau, devient : $f'_t = 0,0004044\omega^3$; ce qui donne avec les valeurs numériques :

$$2f'_t = 2 \times 0,0004044 \times 94,25^3 = \mathbf{676} k_t.$$

— D'où :

$$T_{r_1} = \frac{4476}{2826 + 587 + 387 + 676} + \frac{130}{4476 \times 0,029} = \mathbf{4606} \text{ kilogrammètres,}$$

et d'où :
$$K_{r_1} = \frac{2826}{4606} = \mathbf{0,613}.$$

2° **L'emploi de trois pompes conjuguées, de $R_1 = 0,200$, montées sur le même arbre**, demandera pour Σ une augmentation relative à $2^m,50$ de tuyaux droits de raccordement des pompes, soit :

$$11,5 \times 2,5 \times 0,00986 = \mathbf{0,0285};$$

plus celle relative à trois coudes à angles droits comme ci-dessus, soit **0,0222** ; plus enfin la résistance intérieure d'une troisième pompe $R_i = \mathbf{0,102}$. — Et pour ce cas, $\Sigma = 0,692 + 0,0285 + 0,0222 + 0,102 = \mathbf{0,845}$. — De là il résulte : $H_s = 30^m,00 + 0,845 \times 9 = \mathbf{37^m,60}$, dont le tiers, $\mathbf{12^m,533} = H'_s$, est la hauteur statique que chaque pompe doit atteindre. — Ensuite on conclut : $\omega = \frac{(19,62 \times 12,533)^{1/2}}{0,200} = \mathbf{78^m,45}$; d'où :

$$N = \frac{78,45}{0,10466} = \mathbf{750} \text{ tours ;}$$

— d'où aussi, $\omega R_2 = 78,45 \times 0,202 = \mathbf{15,85}$. — Alors pour le premier pourcentage K_r, avec joues protégées, on a :

$$T_r = 2826 + \frac{716}{31,4 \times 0,845 \times 27} + \frac{297}{3 \times 0,047\ (15,85 - 3)^3}$$

$$+ \frac{111}{3839 \times 0,029} = \mathbf{3950} k_t\,; \text{ — d'où } K_r = \frac{2826}{3950} = \mathbf{0,7155}.$$

On aura le deuxième pourcentage K_{r_1}, en ajoutant à T_r le terme

$3f'_t = 3 \times 0{,}000404 \times 78{,}5^3 =$ **585**. — D'où :

$$T_{r_1} = \overbrace{2826 + 716 + 297 + 585}^{4424} + \overbrace{4424 \times 0{,}029}^{128} = \mathbf{4552} k_t;$$

d'où : $$K_{r_1} = \frac{2826}{4552} = \mathbf{0{,}621}.$$

3° **Emploi d'une pompe unique de $R_1 = 0{,}200$.** — Pour ce cas, la valeur de Σ ne devra être augmentée que de la partie afférente à la seule longueur $L = 23^m{,}50$, du tuyautage de refoulement, soit :

$$11{,}67 \times 23{,}5 \times 0{,}000986 = \mathbf{0{,}269};$$

ce qui fait $\Sigma = 0{,}271 + 0{,}269 = \mathbf{0{,}540}$. — D'où l'on tire :

$$H_t = 30 + 0{,}54 \times 9 = 34^m{,}86.$$

De là :

$$\omega = \frac{(19{,}62 \times 34{,}86)^{1/2}}{0{,}200} = \mathbf{130^m{,}76};$$

puis $N = \frac{130{,}76}{0{,}10466} =$ **1250** tours; et, $\omega R_2 = 130{,}76 \times 0{,}202 =$ **$26^m{,}4$**.

Pour le travail réel, avec joues supposées asséchées, on a :

$$T_r = 2826 + \overbrace{31{,}4 \times 0{,}54 \times 27}^{457} + \overbrace{0{,}047\,(26{,}4 - 3)^3}^{600}$$
$$+ \overbrace{3833 \times 0{,}029}^{113} = \mathbf{3996} k_t. \text{ — D'où : } K_r = \frac{2826}{3996} = \mathbf{0{,}707}.$$

En ajoutant le terme f'_t, du frottement des joues, c'est-à-dire :

$$f'_t = 0{,}0004044 \times 130{,}76^3 = \mathbf{903} k_t,$$

on a :

$$T_{r_1} = \overbrace{2826 + 457 + 600 + 903}^{4786} + \overbrace{4786 \times 0{,}029}^{139} = \mathbf{4925} k_t;$$

— d'où : $$K_{r_1} = \frac{2826}{4925} = \mathbf{0{,}573}.$$

4° **Emploi d'une pompe unique, tournant à 900 1/2 tours.** — Il s'agit de déterminer le diamètre du tambour mobile. — Ce diamètre devant être supérieur à celui 0,400, de la pompe employée jusqu'alors, il s'ensuit que la résistance intérieure de la nouvelle pompe sera augmentée de 1/3 environ, à cause du plus long parcours de l'eau dans les canaux du tambour; cette augmentation sera donc de $\frac{0{,}102}{3} = 0{,}034$, à ajouter à la précédente valeur de Σ, qui devient pour ce quatrième cas :

$$\Sigma = 0{,}54 + 0{,}034 = \mathbf{0{,}574};$$

d'où la hauteur statique que cette pompe doit atteindre :

$$H_s = 30^m,00 + 0,574 \times 9 = \mathbf{35^m,166}.$$

La valeur de ω à 990 1/2 tours est **94,25**. — Alors de l'équation (24) :

$$\omega^2 R_1^2 = 2gH_s, \quad \text{on tire :} \quad R_1 = \frac{(19,62 \times 35,166)^{1/2}}{94,25} = \mathbf{0,280}.$$

La largeur cylindrique extérieure des orifices du tambour de $R_1 = 0,200$, étant $b = 0,110$; dans celui de $R_1 = 0,280$, cette largeur devra être réduite dans le rapport de $\frac{0,110 \times 20}{28} = 0^m,079$; d'où : $110 - 79 = 0^m,031$, à retrancher de $0,188 = b_1$, en gardant les constantes d'épaisseurs de fonte ; ce qui donne : $b'_1 = 0,188 - 0,031 = \mathbf{0,157}$; et le coefficient β devient :

$$\beta = \frac{0,047 \times 0,157 \times 280}{0,188 \times 0,200} = \mathbf{0,0545}, \text{ au lieu de } 0,047.$$

On peut donc maintenant obtenir successivement :

$$T_r = 2826 + \frac{487}{31,4 \times 0,574 \times 27} + \frac{713}{0,0545\,(94,25 \times 0,282 - 3)^3} + \frac{117}{4026 \times 0,029} = \mathbf{4143} k_t ;$$

d'où : $K_r = \frac{2826}{4143} = \mathbf{0,682}.$

Ensuite le coefficient γ devient :

$$\gamma = 128 \times 0,00703\,(0,295^5 - 0,100^5) = 0,900\,(0,002234 - 0,00001) = \mathbf{0,002} ;$$

d'où, d'après la formule, $f'_t = \gamma\omega^3$, on obtient :

$$f'_t = 0,002 \times 94,25^3 = \mathbf{1675} k_t \,!...$$

c'est effrayant, et pourtant vrai !... Alors il vient :

$$T_{r1} = \frac{5701}{2826 + 487 + 713 + 1675} + \frac{165}{5701 \times 0,029} = \mathbf{5866} k_t ;$$

d'où : $$K_{r1} = \frac{2826}{5866} = \mathbf{0,481}.$$

5° **Pour établir un contraste, soit proposé l'emploi de deux pompes tournant à 1250 tours, comme au troisième cas.** — Le diamètre du tambour mobile de ces pompes devant être plus petit que celui 0,400, des premier, deuxième et troisième cas, leur résistance intérieure sera moindre de 1/4 environ. — Il s'ensuit, toutes choses autres étant égales d'ailleurs, que la Σ, dans cette installation, sera celle, $\Sigma = 0,694$, du premier cas, dimi-

nuée de $1/2R_t = \frac{0,102}{2} = 0,051$, et deviendra par suite :

$$\Sigma = 0,692 - 0,051 = \mathbf{0,641}.$$

Alors en répétant la série des calculs du quatrième cas précédent, on a successivement : — $H_s = 30^m,00 + 0,641 \times 9 = \mathbf{35^m,967}$, dont la moitié,

$$\mathbf{17^m,88} = H'_s,$$

est la hauteur statique afférente à chaque pompe. — A 1250 tours, on a : $\omega = 130^m,76$; de là on tire : $R_1 = \frac{(19,62 \times 17,88)^{1/2}}{130,76} = 0,143$, soit : $R_1 = \mathbf{0,145}$.

Pour des raisons analogues à celles qui sont développées ci-dessus, on trouvera que la largeur b_1 doit se réduire à $b'_1 = 0,188 + 0,022 = \mathbf{0,210}$. Alors le coefficient β devient $\beta = \mathbf{0,038}$, au lieu de 0,047. — Pour avoir le premier coefficient de rendement K_r, on calcule d'abord :

$$T_r = 2826 + \overline{31,4 \times 0,641 \times 27}^{\;543} + \overline{2 \times 0,038\,(130,76 \times 0,147 - 3)^3}^{\;323}$$
$$+ \overline{3692 \times 0,029}^{\;107} = \mathbf{3799}k_t\,;$$

d'où : $K_r = \frac{2826}{3799} = \mathbf{0,744}$.

Le coefficient γ devient :

$$\gamma = 128 \times 0,00703\,(0,16^5 - 0,10^5) = 0,900\,(0,0001048 - 0,00001) = \mathbf{0,0000854}\,;$$

d'où l'on conclut : $2f'_t = 2 \times 0,0000854 \times 130,76^3 = \mathbf{382}k_t$, au lieu des $1675k_t$ du cas précédent !... De là on tire :

$$T_{r_1} = \overline{2826 + 543 + 323 + 382}^{\;4074} + \overline{4074 \times 0,029}^{\;118} = \mathbf{4192}k_t\,;$$

et enfin : $$K_{r_1} = \frac{2826}{4192} = \mathbf{0,674}.$$

Les résultats ci-dessus sont groupés dans le tableau C ci-contre, qui permet d'en saisir l'ensemble.

Tableau C. — *Application de la théorie statique des pompes centrifuges. — Résumé des résultats d'une élévation à 30 mètres, de 94,2 litres d'eau à la seconde, avec une vitesse d'évacuation de* $3^m,00$, *par une section de* $0^{m2},0314$, *correspondant à* $0^m,200$ *de diamètre des tuyaux de refoulement. — Cinq solutions, par pompes conjuguées et par pompes uniques.*

DÉSIGNATION	RAYONS DES TAMBOURS MOBILES R_1	Σ	H_s	H'_s	ω	N	T_u	$\alpha\Sigma V s$	f_t	f_m	T_r	K_r	f'_t	f'_m	T_{r_1}	K_{r_1}
1er Cas. Deux pompes conjuguées.	0,200	0,692	36,228	18,114	94,25	900,5	2826	587	387	110	3910	0,722	676	130	4606	0,613
2e Cas. Trois pompes conjuguées.	0,200	0,845	37,60	12,55	78,45	750	2826	717	297	111	3950	0,715	585	128	4551	0,621
3e Cas. Une pompe unique......	0.200	0,540	34,86		130,76	1250	2826	457	600	113	3996	0,707	903	139	4925	0,573
4e Cas. Une pompe unique.....	0,280	0,574	35,166		94,25	900,5	2826	487	713	117	4143	0,682	1675 !	165	5866	0,481
5e Cas. Deux pompes conjuguées.	0,145	0,641	35,769	17,88	130,76	1250	2826	543	323	107	3799	0,744	381	118	4192	0,674

30. De l'examen du tableau C, et des calculs qui s'y rapportent, se dégage un principe général concernant les pompes centrifuges : c'est que les meilleurs rendements de ces appareils s'obtiennent par les tambours mobiles de moindres surfaces noyées, produisant des frottements dans l'eau; lesquels frottements, qui sont proportionnels à ces surfaces, prennent, aux grandes hauteurs d'élévation, une prépondérance que l'on ne soupçonnerait pas *a priori*. Par suite dans les élévations, soit que l'on applique des pompes conjuguées, soit que l'on applique des pompes uniques, il faut, dans les produits ωR proportionnels aux racines carrées des hauteurs, tendre à augmenter les valeurs de ω, c'est-à-dire les nombres de tours, pour arriver à n'employer que des tambours ayant les plus petits diamètres possibles, et, partant, les moindres surfaces frottantes. — D'autre part, il se trouve que les pompes conjuguées en nombre quelconque, malgré qu'elles s'accompagnent d'un accroissement dans le facteur Σ des résistances, sont avantageuses et semblent être même

bien plus avantageuses que des pompes uniques de mêmes type et dimensions, employées dans les mêmes circonstances. — C'est que, par l'emploi de ces pompes multiples, on diminue toutes les vitesses circonférentielles aux cubes desquelles les frottements des surfaces en question sont proportionnels, et surtout les frottements des joues latérales des tambours mobiles, qui, eux, sont, de plus, proportionnels aux carrés des rayons extérieurs, ce qui les rend si dangereux. Voilà un premier fait acquis et une première règle *indiquée*.

Examen des solutions du tableau C, *par rapport au paragraphe* 22. — Maintenant passons à un autre examen individuel de chacune des solutions du tableau C proposées, afin de voir ce qu'elles ont de conciliable ou d'inconciliable avec les règles du paragraphe 22 : c'est le plus instructif.

Première solution. — En se reportant à l'installation du tableau B (Pl. IV), à laquelle se rapportent ces études, on voit que la hauteur d'aspiration, $h = 3^m,70$, laisse, à la pression atmosphérique H_a, une force ascensionnelle de $h_a = 10^m,33 - 3,70 = 6^m,63$ capable d'imprimer à l'eau une vitesse $V_a = \sqrt{19,62 \times 6,63} = 11,40$. — Le rayon des ouïes, dans cette application de la pompe, est supposé $R_0 = 0^m,100$; à cause du grand débit, que l'on s'est imposé de créer, il ne serait plus rationnel de descendre au-dessous de cette valeur.

Or à 900 1/2 tours, que comporte cette première solution, la vitesse circonférentielle, correspondant au rayon $R_0 = 0,100$, serait $V_{c0} = 0,10466 \times 900,5 \times 0,1 = 9^m,43$. — Alors, en se reportant aux règles du paragraphe 22, on trouve :

$$\rho = \frac{V_a}{V_{c0}} = \frac{11,40}{9,43} = 1,20\,;$$

c'est-à-dire l'extrême limite pour avoir du débit. — Pour obtenir un régime de bonne allure, c'est-à-dire $\rho = 1,30$ au moins, il faut poser $\frac{V_a}{9,43} = 1,30$; d'où $V_a = 1,30 \times 9,43 = 12^m,26$,

qui demandent une colonne ascensionnelle de valeur $h_a = \frac{12,26^2}{19,62} = 7^m,66$, laquelle correspond à une hauteur d'aspiration $h = 10,33 - 7,66 = 2^m,67$; et $3^m,70 - 2,67 = 1^m,02$ est la hauteur dont il serait convenable de baisser la pompe, relativement à son installation du tableau B.

Deuxième solution. — En opérant comme ci-dessus on trouve qu'à 750 tours on a, pour V_{c0}, la valeur :

$$V_{c0} = 0,10466 \times 750 \times 0,10 = 7^m,85 ;$$

et pour $h = 3^m,70$ à l'aspiration, il vient $\frac{V_a}{V_{c0}} = \frac{11,40}{7,85} = 1,45$, c'est-à-dire une très sûre allure, gouvernant son débit théoriquement. — En cherchant le rapport $\rho = 1,25$, on trouverait $V_a = 1,25 \times 7,85 = 9^m,81$; d'où $h_a = \frac{9,81^2}{19,62} = 4^m,95$, ce qui indique, qu'avec cette installation à trois pompes conjuguées, on peut, en ayant encore du résultat, aspirer à une hauteur $h = 10,33 - 4,95 = 5^m,38$.

Troisième solution. — Solution par une pompe unique demandant 1250 tours, lesquels entraînent une vitesse $V_{c0} = 0,10466 \times 1250 \times 0,10 = 13^m,08$. — Si l'on se reporte à l'installation du tableau B, en comparant la vitesse $V_a = 11,40$ à celle $V_{c0} = 13,08$, on voit que l'aspiration serait coupée ; il n'y aurait aucun débit possible. — Si l'on pose $\frac{V_a}{V_{c0}} = 1,25$, on trouve qu'il faut à V_a la valeur : $V_a = 1,25 \times 13,08 = 16^m,35$; ce qui correspond à une colonne ascensionnelle $h_a = \frac{16,35^2}{19,62} = 13^m,62$, et $10,33 - 13,62 = -3^m,29$ représentent la hauteur sous laquelle on devrait prendre l'aspiration en charge pour pouvoir commencer à débiter convenablement, avec la pompe employée à cette allure de 1250 tours. — Il s'ensuit que cette solution ne serait réali-

sable que dans des conditions tout à fait exceptionnelles, qui ne peuvent que bien rarement se rencontrer; et d'autant plus que ladite solution comportant un rendement moindre que celui des deux précédentes, on est incité à la rejeter quand bien même. Il est néanmoins bon que ce cas tout extrême ait été traité.

Quatrième solution. — La pompe unique de cette quatrième solution, de $0^m,56$ de diamètre de tambour tournant à 900 1/2 tours, demanderait, comme la solution n° 1, une hauteur d'aspiration de $2^m,67$ au lieu de $3^m,70$, pour pouvoir débiter dans des conditions acceptables; mais l'effroyable perte du travail absorbé par son tambour mobile doit manifestement faire rejeter l'emploi d'une telle pompe en semblable application.

Cinquième solution. — La cinquième solution est évidemment la plus avantageuse à un point de vue, c'est elle qui, par contraste, met en évidence l'influence des frottements des tambours mobiles; mais, ainsi que la troisième solution, à cause du nombre de tours, elle comporte cette condition exorbitante d'une aspiration en charge de $3^m,30$ au bas mot. D'ailleurs cette solution n'est que spéculative; elle est assurément exagérée, car elle ne laisserait qu'une épaisseur aubée de $0^m,040$, qui serait bien près d'être insuffisante pour véhiculer normalement, sans trouble, le volume d'eau à élever. A ces limites la pratique doit se tenir sur ses gardes.

Observons à nouveau que dans l'établissement du tableau C, comme il n'a pas été tenu compte des réductions dans le débit, que, sans nul doute, produirait à ces pressions élevées la cause bizarre des rentrées d'eau aux ouïes, les résultats sont rendus quelque peu illusoires, sans que leur valeur comparative en soit altérée toutefois : c'est ce qui importe pour nos conclusions.

D'après l'ensemble des résultats que nous venons de passer en revue, on voit que la théorie statique donne un moyen

facile et rationnel d'établir tous les balancements permettant, dans chaque application, de faire un choix judicieux parmi les solutions à la convenance des nombres de tours moteurs dont on dispose. — Elle a le mérite de bien mettre en évidence les causes de l'incontestable supériorité, sur les pompes employées à l'état unique, des pompes conjuguées appliquées aux grandes hauteurs d'élévation.

D'ailleurs, ce problème des grandes hauteurs d'élévation, desservies par des pompes centrifuges conjuguées, a déjà été résolu avec des rendements parfois acceptables, malgré qu'il ne se soit présenté, jusqu'alors, que dans des conditions obscures et difficiles à traiter. — Seulement les résultats acquis ne l'ont été que par les tâtonnements d'une longue pratique plutôt guidée par l'intuition que par l'exacte appréciation des phénomènes provoqués par le fonctionnement des appareils. Et cela, d'autant plus que les théories ayant cours ne pouvaient être d'aucun aide, en raison de l'impuissance où elles se trouvent de démêler les causes, séparer les effets et établir les caractères de leurs variations. La présente théorie parvient en partie à combler ces lacunes.

Par l'emploi de ces pompes centrifuges multiples, on peut donc dire que le problème des grandes hauteurs d'élévation est complètement soluble, avec d'aussi bons rendements que ceux que l'on obtient pour les hauteurs modérées habituelles, puisque tant il est vrai que, loin de diminuer, ces rendements s'améliorent plutôt avec le nombre des appareils conjugués : circonstance éminemment favorable qui, de plus, permet de déterminer, sans crainte d'avoir du déficit à subir, le nombre des pompes à accoupler en chaque cas pour satisfaire aux exigences du paragraphe 22.

En général, l'élévation de l'eau aux grandes hauteurs, par des pompes centrifuges, ne se fait guère, jusqu'alors, que pour de petits débits, pour lesquels la multiplicité des appareils conjugués entraîne, malheureusement, une complication, une

surveillance, un entretien, un emplacement plus grand ; un coût plus élevé ; tous inconvénients que l'on peut faire disparaître, dans bien des cas, par l'emploi de pompes uniques, jusqu'aux environs de 20 mètres; peut-être même jusqu'à 30 mètres peut-on obtenir encore des solutions acceptables pour de petits débits, comme il est dit. Passé 30 mètres, l'emploi des pompes multiples s'impose manifestement de toute manière.

Ce désidératum de l'emploi de pompes uniques, dans les limites qui viennent d'être indiquées, peut être réalisé d'autant plus avantageusement que l'on saura rendre plus efficace, contre les rentrées d'eau, les joints extérieurs des joues des tambours mobiles avec leurs enveloppes. Ce désidératum serait même réalisé totalement si l'on parvenait à rendre ces joints tout à fait étanches. Alors on arriverait, sauf peut-être pour les joints eux-mêmes, à supprimer la plus grande partie des pertes de travail dues aux frottements des joues, et aussi à supprimer les perturbations, dans les débits, causées par les rentrées d'eau aux ouïes : ce serait l'idéal. — Pour cela il ne faut pas employer toutefois des remèdes qui seraient pires que le mal, par exemple des joints métalliques frottant sous plus ou moins de pression. — On peut en approcher, et même y parvenir dans des limites étendues, par des joints établis en cascades et cataractes sans contacts métalliques, comme le fait actuellement la Maison Granddemange dans la construction de ses nouvelles pompes, pour lesquelles ce résultat d'étanchéité relative est bien près d'être atteint. La figure 17 (Pl. III) donne une idée de la disposition de ces joints adoptés en dernier lieu par cette maison, qui est ainsi parvenue à améliorer les rendements et qualités de ses pompes d'une manière très notable sous tous les rapports.

31. Renseignements technologiques. — Quant à la technologie concernant la construction des pompes centri-

fuges, c'est le royaume de l'empirisme. — Il existe tant de systèmes ne se différenciant que par des détails souvent puérils, qu'il n'y a pas lieu de critiquer les uns en prisant les autres ; cela entraînerait à de trop longues dissertations sans espoir d'aboutir à aucun résultat précis. — Tout au plus peut-on donner quelques indications sommaires, n'ayant rien d'absolu d'ailleurs.

Ainsi, en général, on détermine une pompe centrifuge pour un débit moyen qui sert à la caractériser, étant donné que, à une même hauteur, ce débit, dans une grande étendue, peut être augmenté par une plus grande rotation, et diminué par une rotation moindre ou par l'étranglement d'une vanne sans contraction : opérations qui entraînent dans les rendements mécaniques des variations que l'on sait évaluer.

Partant de ce débit moyen, et comme, en raison des causes perturbatrices que les précédentes analyses ont fait découvrir, il ne faut pas trop chercher la quintessence, il y a plutôt lieu, en bonne pratique, de s'éloigner de la théorie et de l'équation du maximum qu'elle détermine, quand il s'agit d'adopter la vitesse de l'eau à son passage par la tubulure de refoulement sur le corps de pompe et dans le canal spiraliforme de l'enveloppe du tambour mobile. — On peut, par exemple, prendre pour règle que, à ce passage, cette vitesse ait comme hauteur génératrice, pour les petits débits, environ 2,3 à 2,5 fois le diamètre de la tubulure ci-dessus désignée. — De sorte qu'en appelant Q le débit, S_r la section de cette tubulure de refoulement, et D_r son diamètre, on posera :

$$Q = \frac{\pi D^2_r}{4} \sqrt{2g \times 2{,}3D_r, \text{ ou } 2{,}5D_r},$$

d'où, selon les cas :

$$Dr = \sqrt[5]{\frac{3{,}48Q^2}{g\pi^2}}, \qquad \text{ou} \qquad Dr = \sqrt[5]{\frac{3{,}20Q^2}{g\pi^2}}.$$

On arrondira les chiffres, et on aura ainsi la dimension gouvernante.

Ensuite on donnera à la tubulure d'aspiration un diamètre D_a, supérieur de $0^m,01$ à $0^m,02$, à D_r ; puis à chacune des ouïes du tambour mobile, par un diamètre d'épure D_0, une section au moins égale à la section S_r, de refoulement. — Alors, s'il s'agit d'une pompe devant être employée à l'état unique, on donnera à son tambour mobile un diamètre $D_t = 2D_0$. Cette proportion pourra être un peu diminuée pour des tambours conjugués, en faisant $D_t = 1,75$ à $1,80$ de D_0; c'est tout bénéfice pour les pompes multiples. — Enfin on donnera à la section normale de l'aubage une valeur $S_{na} = 2\pi Rb \sin \gamma = 1,15$ à $1,20$ de S_r, d'après l'inclinaison du dernier élément des aubes sur la tangente circonférentielle.

Quant à la forme des aubes, courbes ou radiales, c'est chose à peu près indifférente; il suffit de se reporter à ce qui est dit à ce sujet dans les notes ci-après, à la fin du mémoire.

Pour le tracé des aubes courbes, en cas d'emploi, le procédé du Général Morin, indiqué dans les notes en question, est le meilleur, parce qu'il est le plus expéditif et qu'il se prête à toutes les fantaisies.

Une fois les données ci-dessus établies, calculées, et les préférences de formes arrêtées et admises, il n'y a plus qu'à confier le tout à un dessinateur adroit. Pour le reste, qui concerne plus particulièrement la construction de la machine, avec du sens pratique, il en saura faire plus que toutes les théories. — D'ailleurs, et pour le répéter, parmi les solutions technologiques qui pourront être obtenues par la combinaison de ces divers éléments, la meilleure sera celle qui arrivera à réaliser, au plus près et au meilleur compte, l'étanchéité des joints latéraux des tambours mobiles avec leurs enveloppes. — Avis aux chercheurs.

Maintenant, dans les applications d'une pompe déterminée comme ci-dessus, il reste entendu qu'il y aura toujours grand

intérêt, afin de diminuer les pertes sèches dues aux résistances à la circulation générale, de soigner le montage des tuyautages de desserte ; et, dans le même but, il faudra, chaque fois qu'on le pourra, employer des tuyaux de plus grands diamètres que ceux des tubulures sur le corps de l'appareil, en faisant les raccordements avec ces derniers par des tronçons coniques. — L'importance de ces diverses précautions a été suffisamment signalée précédemment pour qu'il y ait davantage besoin d'insister. — Enfin, dernière et suprême recommandation, se tenir toujours bien en règle avec les exigences du dangereux paragraphe 22.

Je termine ici cette étude. — Au point où je la laisse, la question des pompes centrifuges n'est pas close, comme on peut voir. — Je suis loin d'être parvenu à découvrir tous ses secrets. — Elle garde encore bien des énigmes, parmi lesquelles, entre autres, le singulier phénomène produit par les rentrées d'eau aux ouïes; phénomène que je n'ai fait qu'entrevoir sans pouvoir l'expliquer. D'autres seront probablement plus heureux.

NOTES

A l'effet de rechercher la courbe rationnelle devant servir à engendrer les aubes propulsantes des tambours mobiles de pompes et de ventilateurs, j'ai fait, dans un ouvrage paru en 1881 (Dunod, éditeur), une très longue étude des lois du mouvement d'un corps soumis, en libre obéissance, à l'action de la force centrifuge.

J'ai pu me convaincre, par la suite, que cette étude et son objet n'avaient qu'une importance bien limitée. Néanmoins il peut s'en dégager quelques notions utiles.

Voici, en raccourci, en quoi consiste cette étude et la manière dont j'ai présenté la question.

Supposons un corps A (*fig.* 18, Pl. III), pouvant coulisser librement sur un rayon AB, et soumis à un mouvement de rotation ω, dans le sens de la flèche *ef*, en même temps qu'à l'action de la force centrifuge qu'il engendre. — Un style armant le corps A décrira, sur un plan, une trajectoire de mouvement absolu dont il s'agit d'établir les équations polaires.

Appelons R, le rayon de point de départ du mobile, et E, l'espace variable parcouru à partir de ce point, suivant la tringle AB supposée indéfinie, rigide et indéformable.

La force centrifuge a pour expression générale $\varphi = \omega^2\rho$, proportionnelle au rayon décrivant $\rho = R + E$. Par suite, les lois du mouvement qu'elle détermine sur le corps A de la figure sont celles du mouvement que produit une force dont l'intensité croît comme l'espace qu'elle fait parcourir ; et, pour ce cas, l'expression analytique de la vertu accélératrice de ce mouvement est, après un espace E rayonnant parcouru :

$$\text{(A)} \qquad \varphi = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2E}{dt^2} = \omega^2 (R + E);$$

multipliant de part et d'autre par $2dE$, il vient :

$$2\,\frac{d^2E}{dt^2}\,dE = \omega^2 (R + E)\,2dE,$$

ce qui revient à :

$$2d\left[\frac{dE}{dt}\right] dE = \omega^2 (R + E)\,2dE.$$

Cette dernière équation a pour intégrale :

$$\left[\frac{dE}{dt}\right]^2 = \omega^2 (2RE + E^2).$$

Et d'après l'équation analytique $\frac{dE}{dt} = V$, on a $V^2 = \left[\frac{dE}{dt}\right]^2 = \omega^2(2RE + E^2)$; d'où l'on tire la vitesse dont le corps A est animé, suivant son guide rayonnant, après l'espace E parcouru :

$$(1) \qquad V = \frac{dE}{dt} = \omega \sqrt{2RE + E^2},$$

expression qui fournit cette autre équation différentielle,

$$(B) \qquad dt = \frac{1}{\omega} \times \frac{dE}{\sqrt{2RE + E^2}},$$

dont l'intégrale entre R et E, c'est-à-dire entre E = 0 et E, est :

$$(2) \qquad t = \frac{1}{\omega} \times \log \text{ hyp} \left(\frac{R + E + \sqrt{2RE + E^2}}{R}\right),$$

qui exprime, à partir du point de départ A, en angle de durée, ou temps angulaire, le temps en fonction du même espace rayonnant E, parcouru.

Cette dernière équation permet de développer en coordonnées polaires la courbe *Amn*, trace du mouvement absolu (*Unwin's path*), du corps A, coulissant suivant un rayon, à partir de A, en décrivant une infinité de spires autour de la circonférence polaire de rayon OA ; courbe que, pour cette raison, j'avais appelée *spirale centrifuge radiale*.

La tangente à cette courbe polaire est donnée par l'expression analytique connue : $\text{Tang } \mu = \rho \frac{d\theta}{d\rho}$. θ étant l'angle de durée à partir du rayon polaire OB, d'origine. — Or on a :

$\rho = R + E$; d'où : $d\rho = dE$; puis : $\theta = \omega t$; d'où : $d\theta = \omega dt$;

et, d'après (B), on a aussi :

$$d\theta = \omega dt = \frac{dE}{\sqrt{2RE + E^2}}.$$

Alors l'expression cherchée de la tangente devient :

$$(3) \qquad \text{tang } \mu = (R + E) \times \frac{dE}{\frac{\sqrt{2RE + E^2}}{dE}} = \frac{R + E}{\sqrt{2RE + E^2}},$$

valeur indépendante de la vitesse de rotation.

Si le rayon polaire de point de départ R était très petit, on aurait à la limite :

$$\text{tang}\,\mu = \frac{E}{E} = 1 = \text{tang}\,45°;$$

et l'équation (1) donnerait pour V la valeur $V = \omega E$, c'est-à-dire une valeur égale à la vitesse circonférentielle, E se comptant à partir du centre de rotation. La trajectoire serait, dans ce cas, la spirale logarithmique népérienne $\rho = e^{\theta}$, qui coupe tous ses rayons vecteurs sous un angle de 45°.

Les lois de mouvement ci-dessus, et leurs particularités, représentées par les équations (1), (2) et (3), sont celles d'un mouvement ultra-accéléré, qui ne peut, en aucune manière, se concilier avec un mouvement d'écoulement permanent continu, dont, en chaque point, l'uniformité, dans le temps, est la première condition.

A propos des aubes courbes. — Au cours de l'étude dont je viens de parler, je fus conduit à construire l'appareil représenté par la figure 19 (Pl. IV). — C'est une came dont la forme est celle de la trajectoire *abc*, décrite par la bille d'indigo *a*, sollicitée par une rotation ω de sens *ef*, et *par simple contact*, suivant la face rayonnante *ad* de la came.

Dans les mêmes conditions de rotation ω, mais de sens contraire *e'f'*, la même bille d'indigo *a*, sollicitée à nouveau, et *par simple contact*, par le profil *agh* de la came, décrit une trajectoire *amn*, qui est coupée normalement, en chacun de ses points, par le profil *agh* de cette came propulsante ; les deux courbures sont donc orthogonales.

C'est ce que j'avais été amené à penser, à cause de la réciprocité qui permet à l'action de la force centrifuge, en équilibrant l'influence des frottements mécaniques, de coopérer à la description d'une trajectoire absolue que, par association d'idées, je comparais à la trajectoire décrite par chacun des points d'un crayon C poussé par l'hypothénuse d'une équerre E, glissant suivant une règle R (*fig.* 20, Pl. V). — Et, en effet, l'appareil de la figure 19, malgré sa grossièreté, fournit assez bien la vérification de cette prévision, que l'on peut d'ailleurs, à partir de ce cas, appuyer de considérations théoriques tirées de l'étude de la spirale centrifuge ci-dessus; spirale dont les équations polaires sont visiblement celles du profil de la came propulsante *agh* de la figure 19.

Maintenant, pour établir la géométrie de la trajectoire *amn* du mouvement absolu de la bille *a*, c'est-à-dire de l'orthogonale du profil *agh*, soit considéré figure 21. — AB est l'élément d'une courbe courant suivant la flèche *ef*, et poussant *par contact* la bille A, à laquelle elle fait décrire l'orthogonale AC. — Prenons pour axe des abscisses la ligne droite MN, qui pourrait tout aussi bien être, en mouvement de rotation, un arc de

cercle M′N′, l'esprit suppléant au rétablissement. — Désignons par t les abscisses, et E les ordonnées de la courbe propulsante AB, dont les équations sont supposées connues; et, de même, désignons par θ les abscisses, et E les ordonnées de son orthogonale AC.

Sur la figure, on aura, pour déterminer les θ de cette orthogonale, les deux équations de condition simultanées suivantes, dans lesquelles E est la variable indépendante :

$$\text{(C)} \quad \frac{dt}{dE} = \operatorname{tang} \beta, \qquad \text{et} \qquad \frac{dE}{d\theta} = \operatorname{tang} \beta; \quad \text{d'où:} \quad \frac{dt}{dE} = \frac{dE}{d\theta};$$

et, comme $\frac{dt}{dE}$ est un coefficient différentiel fonction connue de E, $f'(E)$, il s'ensuit que l'on peut écrire : $f'(E) = \frac{dE}{d\theta}$; d'où l'intégrale

$$\text{(D)} \qquad \theta = \int \frac{dE}{f'(E)} + C.$$

Telle est la formule générale qui permet de déterminer les orthogonales des courbes dont on connaît les fonctions $f'(E)$.

Pour appliquer la formule (D) au cas de la spirale centrifuge radiale, soit considéré la figure 22; — *mabcd* est une de ces spirales. Un de ses élément *bc*, infiniment petit, a *bf* pour élément de courbe orthogonale. Dans les deux triangles *bci* et *bfk*, on lit sur la figure :

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{bi}{ci} = \frac{fk}{bk}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\omega\rho dt}{dE} = \frac{dE}{\omega\rho d\theta}.$$

Or dans ces égalités on a :

$$\rho = R + E;$$

et l'on sait que, d'après l'équation (B) ci-dessus,

$$dt = \frac{dE}{\sqrt{2RE + E^2}} \times \frac{1}{\omega};$$

alors il vient en remplaçant :

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{(R + E)\, dE \times \omega}{dE \sqrt{2RE + E^2} \times \omega} = \frac{dE}{\omega\,(R + E)\, d\theta};$$

d'où l'on tire :

$$\omega d\theta = \frac{\sqrt{2RE + E^2}}{(R + E)^2} \times dE;$$

équation dont l'intégrale générale est :

$$\text{(F)} \qquad \omega\theta = \int \frac{\sqrt{2RE + E^2}}{(R + E)^2} \times dE + C.$$

Faisons $R + E = z$, on aura $dE = dz$; puis $R^2 + 2RE + E^2 = z^2$, d'où $2RE + E^2 = z^2 - R^2$; alors, avec ces transformations, l'équation (F) devient :

$$\text{(G)} \qquad \omega\theta = \int \frac{\sqrt{z^2 - R^2}}{z^2} dz + C = \int \frac{z^2 - R^2}{z^2 \sqrt{z^2 - R^2}} dz + C,$$

qui donne en subdivisant :

$$\text{(H)} \qquad \omega\theta = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - R^2}} - R^2 \int \frac{dz}{z^2 \sqrt{z^2 - R^2}} + C.$$

Or on a immédiatement :

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - R^2}} = \log \text{hyp} \left(z + \sqrt{z^2 - R^2}\right).$$

Et il reste seulement à résoudre l'intégrale

$$R^2 \int \frac{dz}{z^2 \sqrt{z^2 - R^2}},$$

qui revient à celle de la différentielle binôme $z^{-2} (z^2 - R^2)^{-1/2} dz$.

Pour traiter cette différentielle, multiplions-la et divisons-la par $z^{2 \times -1/2} = z^{-1}$; elle devient la différentielle binôme :

$$z^{-3} (1 - R^2 z^{-2})^{-1/2} dz,$$

qui remplit la condition d'intégralité $\frac{-3 + 1}{-2} = 1 =$ un nombre entier.

Posons $1 - R^2 z^{-2} = u$; ce qui donne $z^{-2} = \frac{1 - u}{R^2}$; puis différentiant, on obtient :

$$-2z^{-3} dz = \frac{-du}{R^2}. \qquad \text{d'où :} \qquad z^{-3} dz = \frac{+du}{2R^2}.$$

De là, en remontant, on a la suite :

$$\int z^{-2}(z^2 - R^2)^{-1/2}dz = \int z^{-3}(1 - R^2z^{-2})^{-1/2}\,dz$$
$$= \int \frac{du}{2R^2} \times u^{-1/2} = \frac{1}{2R^2} \times 2\sqrt{u} = \frac{\sqrt{u}}{R^2}$$

Alors retournant en z, on a :

$$\frac{\sqrt{u}}{R^2} = \frac{\sqrt{1 - R^2z^{-2}}}{R^2} = \frac{\sqrt{z^2 - R^2}}{zR^2}.$$

Et l'équation intégrale (H), complétée, devient :

$$\omega\theta = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - R^2}} - R^2 \int \frac{dz}{z^2\sqrt{z^2 - R^2}} + C$$
$$= \log \text{hyp}\,(z + \sqrt{z^2 - R^2}) - \frac{\sqrt{z^2 - R^2}}{z} + C.$$

Maintenant, revenant en E, il vient :

$$\omega\theta = \log \text{hyp}\,(R + E + \sqrt{2RE + E^2}) - \frac{\sqrt{2RE + E^2}}{R + E} + C.$$

Il faut définir cette intégration entre $E = 0$ et E. Pour $E = 0$, on a : $0 = \log \text{hyp}\, R + C$; d'où l'on conclut : $C = -\log \text{hyp}\, R$, et l'on a :

$$\omega\theta = \log \text{hyp}\,(R + E + \sqrt{2RE + E^2}) - \log \text{hyp}\, R - \frac{\sqrt{2RE + E^2}}{R + E};$$

et définitivement :

$$\theta = \frac{1}{\omega} \times \left[\log \text{hyp}\left(\frac{R + E + \sqrt{2RE + E^2}}{R}\right) - \frac{\sqrt{2RE + E^2}}{R + E}\right],$$

relation qui permet, à partir du point m, de développer la courbe en coordonnées polaires.

Au cas où, dans la somme $R + E$, R serait très petit, la courbe propulsante deviendrait la spirale logarithmique népérienne coupant toutes les circonférences concentriques sous un angle de 45°. Alors sur la figure 21, on aurait $dE = d\theta$; et, d'après ce qui vient d'être indiqué, le coefficient différentiel $\frac{dE}{dt} = \omega\sqrt{2RE + E^2}$ deviendrait $\frac{dE}{dt} = \omega E$, E se comptant à partir du centre de rotation. Puis les équations de condition donneraient :

$$\omega\theta = \omega t = \int \frac{dE}{E} = \log \text{hyp}\, E,$$

et la trajectoire orthogonale de la courbe propulsante lui serait une courbe identique, décrite en sens contraire.

Toute autre courbe propulsante, encore moins inclinée sur les rayons vecteurs, comporte une orthogonale qui lui est propre, et dont on trouverait les équations polaires comme ci-dessus, ce qui n'a qu'un intérêt spéculatif.

Déduction de certaines propriétés des aubes courbes, conduisant un mouvement, librement développé, de molécules isolées. — Maintenant revenons à la figure 21. — Si en mouvement de rotation ω, suivant flèche *e'f'*, la bille A était soumise, depuis une certaine origine, à l'action propulsante centrifuge du rayon LF lui servant de guide, elle décrirait une spirale centrifuge radiale, dont l'élément AB, par exemple, serait dans le cours du mouvement, tracé pendant l'angle de durée AD', avec une vitesse de description, ou vitesse absolue du point traçant, représentée par AB, considérée comme diagonale du rectangle, dont un côté AD représente la vitesse circonférentielle ω (R + E), et l'autre AF, la valeur de la vitesse relative radiale, $V = \omega \sqrt{2RE + E^2}$, acquise, en vertu de la force centrifuge, par la bille A sollicitée, d'une manière continue depuis le point de départ d'origine.

Si maintenant, avec la même rotation ω de sens contraire *ef*, on fait, depuis la même origine que ci-dessus, propulser, *par contact*, la bille A par la spirale qui vient d'être engendrée, cette spirale, d'après ce qu'on a vu, fera décrire à la bille une trajectoire qui lui sera normale en chaque point; et quand arrivera l'élément propulsant AB, il fera tracer à cette bille, pendant l'angle de durée AD'' = AD', un élément d'orthogonale AG, projection de AF sur AC. Cet élément AG, plus petit que AB, représente évidemment la vitesse de description de cette orthogonale à cet instant.

Ainsi, pour un même parcours angulaire AD' *de rotation, la propulsion par l'aube courbe produit une diminution très grande dans la vitesse absolue du mobile, par rapport à celle que lui communique une propulsion radiale dans des circonstances identiques.*

Si l'angle β avait 45°, c'est-à-dire si AB était un élément de spirale logarithmique népérienne, on aurait AG = 1/2 AB exactement.

Tout ceci, qui précède, est en relation avec ce que l'on peut aussi remarquer sur la figure 22. — Ainsi la bille *m*, libre, sollicitée en rotation ω suivant flèche *e'f'*, par le rayon *mn*, sera amenée, après un angle de durée de rotation *nod* = *t*, de *m* en *d*, en ayant parcouru l'espace rayonnant E = *mn*, tout en décrivant l'arc de spirale centrifuge *mabcd*; et elle s'échappera en *d*, suivant la tangente *du*, avec une vitesse *dr*, diagonale du rectangle dont les côtés ont les valeurs spécifiées sur la figure.

La même bille *m*, propulsée en une même rotation ω de sens contraire *ef*, et *par simple contact*, par la courbe *mabcd*, décrira l'orthogonale *ma'b'c'd'* et arrivera en *d'* après un angle de durée *dod'* égal à la somme des angles de durée $t + \theta$, de la courbe propulsante et de son orthogonale. Et, d'après

ce qui est dit ci-dessus, elle s'échappera suivant la tangente $d'u'$, avec une vitesse $d't$, qui s'obtient en projetant, comme on l'a fait sur la figure 21, la vitesse radiale $d's' = ds = \omega \sqrt{2RE + E^2}$, sur cette tangente $d'u'$.

Ainsi donc, la molécule m sollicitée, par contact, par la spirale centrifuge, met beaucoup plus de temps pour s'évacuer en espace excentrique que par la sollicitation radiale, dans des mêmes conditions de rotation et d'origine du mouvement.

Pour le cas de la spirale logarithmique népérienne, ce temps serait le double.

De ces observations et remarques diverses, on est induit à conclure, d'une manière générale, que, en mouvement développé librement sur des molécules isolées, individuelles, les aubes courbes, à partir d'une inclinaison minimum de 45° sur les rayons vecteurs, c'est-à-dire à commencer par le cas de la spirale logarithmique népérienne, ont la propriété, en propulsant par leur convexité, de diminuer de plus de moitié, en chaque point, la vivacité du mouvement excentrique radial ultra-accéléré, engendré par la force centrifuge agissant sur les mêmes molécules à l'aide d'aubes radiales. Et que, pour ces mêmes aubes courbes, cette propulsion excentrique se fait, au moins, en deux fois plus de temps, pour faire parcourir un même espace rayonnant du centre à la circonférence. D'ailleurs, moins ces aubes seraient inclinées sur les rayons vecteurs, plus elles deviendraient paresseuses à ce point de vue.

On peut inférer encore à ce sujet, que ces mêmes aubes courbes, en atténuant grandement la rudesse d'un mouvement provoqué par des aubes radiales, atténuent tout aussi grandement le mouvement vibratoire qui peut l'accompagner.

Mais il faut bien remarquer aussi que, malgré tout, les lois de ces mouvements, ainsi atténués, n'en sont pas moins les lois du mouvement radial ultra-accéléré dû à la force centrifuge dont ils émanent, et, par conséquent, ne sauraient en aucune manière se concilier avec la loi de permanence d'un débit continu.

Par suite, les phénomènes hydrauliques qui se produisent dans l'intérieur d'un tambour mobile de machine centrifuge, ne peuvent avoir que de très lointaines relations avec les recherches et déductions spéculatives ci-dessus, dont les particularités, relatives à des molécules considérées isolément, disparaissent dans le tourbillon de l'acte général accompli en vertu de la loi de Bernoulli qui gouverne tout l'ensemble, et qui change exactement en pression la vitesse radiale que pourrait engendrer la force centrifuge agissant librement.

Peut-être ne doit-on réellement retenir à l'actif des aubes courbes, que la question d'atténuation du mouvement vibratoire général qui serait le fait d'une propulsion radiale; si tant il est vrai qu'à un tel mouvement correspond l'évanouissement d'une certaine quantité d'énergie.

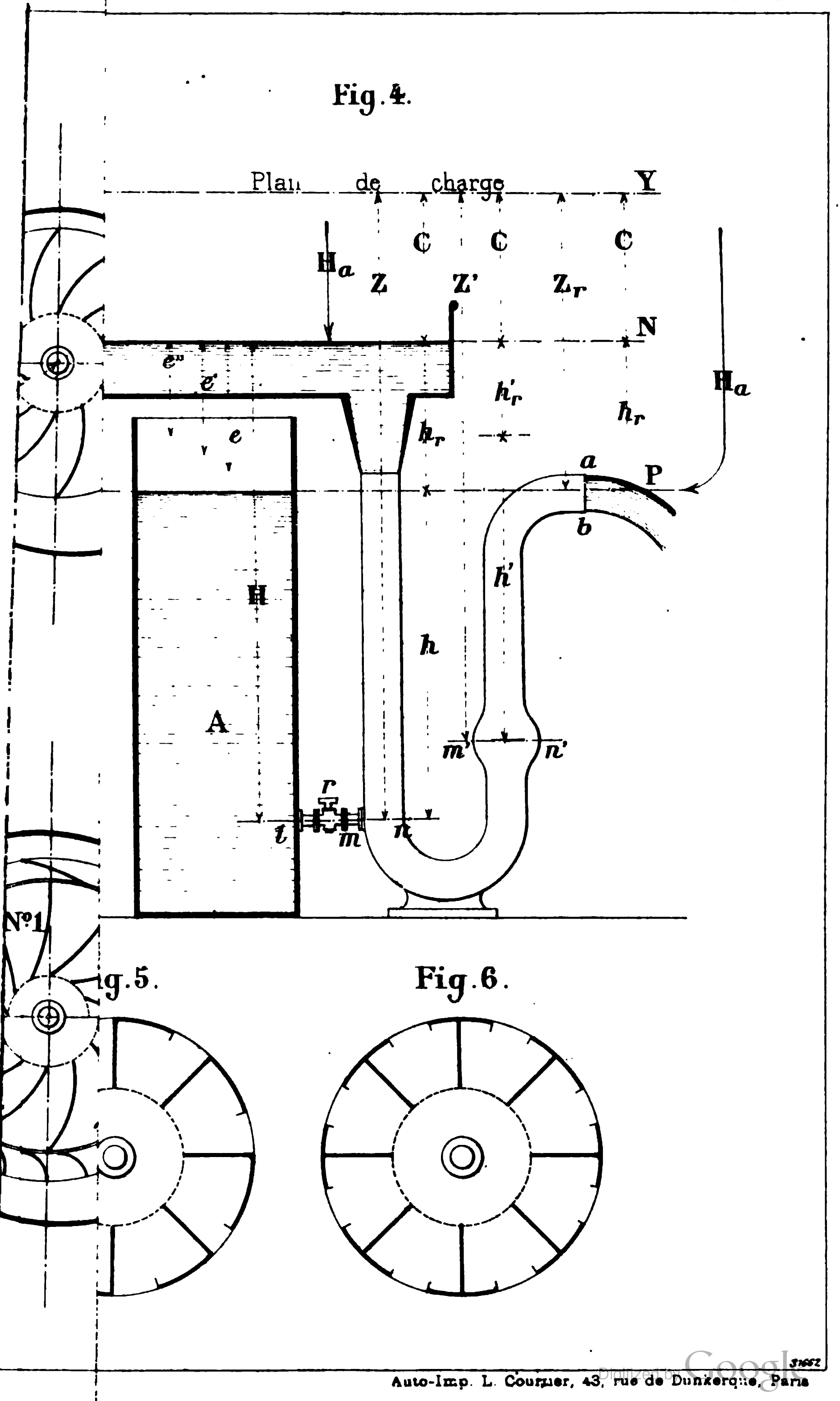
Mais le petit gain que l'on peut ainsi espérer réaliser ne saurait en rien justifier les grands écarts de rendements, signalés par certains auteurs et expérimentateurs, entre des tambours mobiles à aubes courbes et radiales, tout à l'avantage des aubes courbes convexes; écarts qui ont pu provenir de toutes autres causes; il n'en manque pas, comme on a pu le voir dans le courant du mémoire qui précède.

Cette atténuation du mouvement vibratoire peut aussi, pour les ventilateurs, contribuer à apaiser le fonctionnement bruyant de certains de ces appareils. Cela, par exemple, est un avantage qui n'est pas à dédaigner.

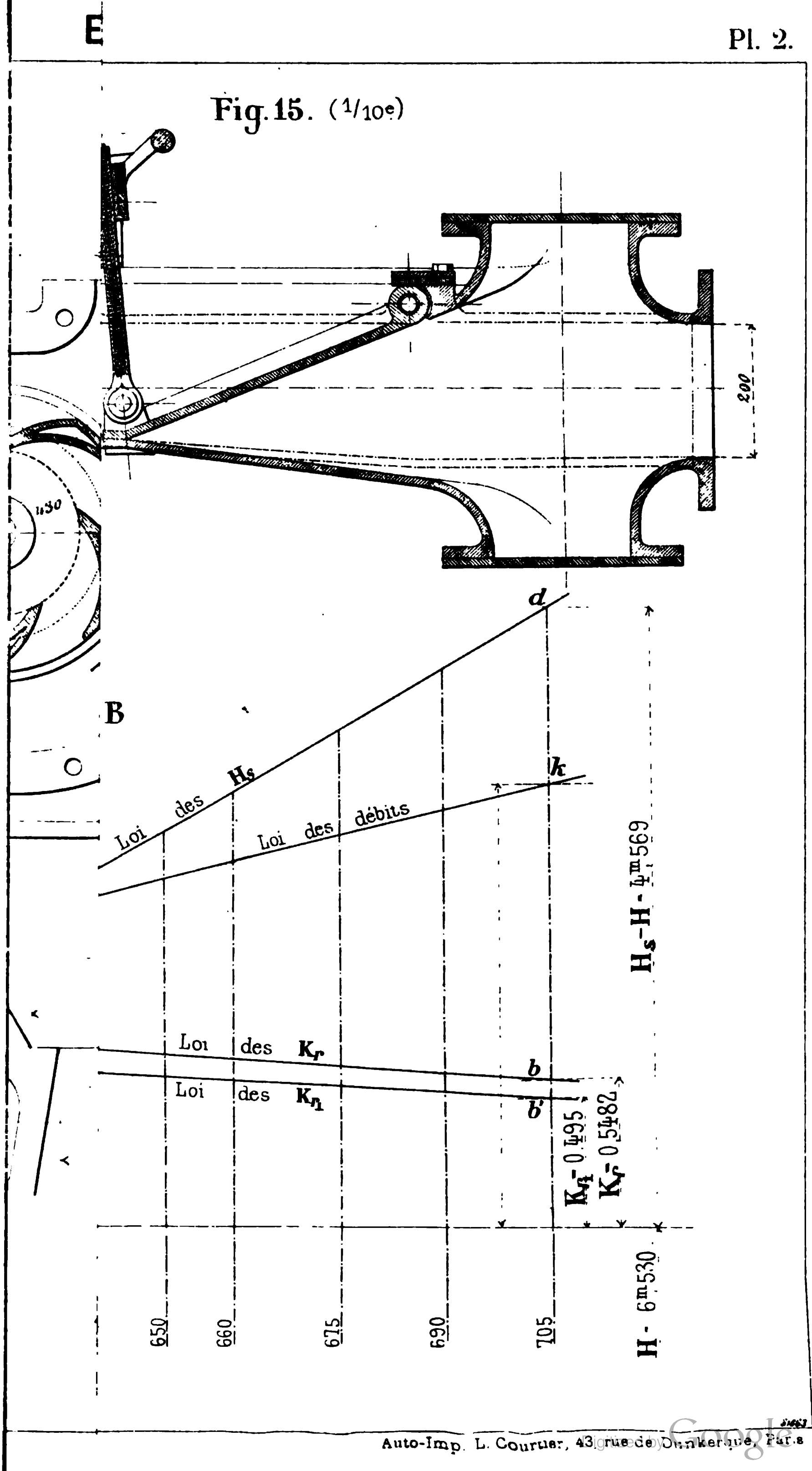
Conclusions. — Quoi qu'il en soit; les quelques raisons qui militent en faveur des aubes courbes convexes doivent plutôt faire conclure à leur adoption. Et l'étude qui vient d'être faite semble démontrer que la courbure à choisir est l'arc de cercle osculateur d'un élément de spirale logarithmique népérienne, coupant toutes les circonférences concentriques sous un angle à 45°. Puis, si l'on s'en tient, pour le discours, aux indications plus ou moins vagues que l'étude ci-dessus a fait apercevoir, on doit aussi conclure qu'il ne faut pas aller au-dessus de cette limite de 45°, car alors la force centrifuge prendrait de la prépondérance radiale, et l'aube courbe verrait ses propriétés altérées. — Il ne faut, non plus, aller trop en dessous, dans la crainte d'avoir une propulsion trop paresseuse. — D'un autre côté, à cause de dégager la section dans les ouïes à la naissance de l'aubage d'un tambour mobile, il vaut mieux qu'à cette naissance les aubes se rapprochent de la direction rayonnante. Il y a donc lieu, pour donner satisfaction à tous les scrupules, et sans plus s'en tracasser l'esprit, de prendre un moyen terme, et d'admettre, par exemple, que l'arc de cercle de courbure des aubes coupera la circonférence extérieure sous un angle de 45° et la circonférence des ouïes sous un angle de 60 à 70°. — Pour tracer un tel arc de cercle il n'y a qu'à employer le procédé du général Morin qui est le suivant :

Tracé du général Morin. — Etant données deux circonférences concentriques (*fig.* 23, Pl. III), il s'agit, par un point A pris sur la circonférence extérieure, de faire passer un arc de cercle qui fasse un angle γ avec la tangente circonférentielle AL et qui vienne couper la circonférence intérieure sous un angle α donné. — Pour cela, à partir de A, on tire la droite AB faisant avec AO un angle γ. — Puis on construit l'angle $AOC = \alpha + \gamma$, et l'on tire la droite CA, qui coupe la circonférence intérieure au point D; puis on joint OD, et sur OD on construit, en D, l'angle α, dont le côté prolongé coupe AB au centre E de l'arc de cercle AD cherché.

Tours, imp. Deslis Frères, 6, rue Gambetta.



Auto-Imp. L. Courtier, 43, rue de Dunkerque, Paris


E
Pl. 2.
Fig. 15. (1/10e)
200
B
d
k
Loi des Hs
Loi des débits
Hs-H = 4m569
Loi des Kr
Loi des Kn
b
b'
Kn = 0.495
Kr = 0.5482
650
660
675
690
705
H = 6m530
Auto-Imp. L. Courtier, 43 rue de Dunkerque, Paris

u
r
q
$\omega(R+E)$

Fig. 23

A
L
γ
γ
α
D
E
α
$\gamma+\alpha$
B
O
C

Auto-Imp. L. Courtier, 43, rue de Dunkerque, Paris

SU

DE

érime

de ES

...ences au frein de Prony, après chaque expérience de...

Nombre de tours de la machine par minute	Longueur du levier du frein de Prony L.	Poids à l'extrémité du levier du frein de Prony P.	Travail moteur en K^mg à l'embrayé du frein T_r	Coefficient de rendement net réel $K_r = \frac{T_u}{T_r}$	Assistaient aux ... M. M...
132	2m000	34k000	939 K^mg	0.665	Olry. Granddeman...
134	"	30k200	847 .	0,510	id.
132	"	25k000	691 .	0,513	id.
133	"	23k000	640 .	0,445	id.

...on II; de 0m200 × 0,65 = 0m²013 pour III; et de 0m200 × ...
...l'écoulement à pleins tuyaux, cette circonstance influe...

132	2m000	34k000	939 Kmg.	0,665	id.
124	"	28k000	728 .	0,544	id.

...étranglée, à cause du moindre débit.

134	2m000	37k500	1040 Kmg	0,675	Ménétrier Co... id.
137	"	40k00	1147 .	0,628	à Chaglieu et Co...

...teur des machines du Service des Eaux de...

132	2m000	35k000	967 Kmg	0.653	

...onstru... ...le est $V = \frac{6,28 \times 633 \times 0,20}{60} = 13^m35$; de là on ...tique $T_o = 97 \times 9^m10 = 881$ Kmg; puis le coeffi- ...le part et d'autre: $1 + m = \frac{T_r}{T_o} = \frac{K_o}{K_r} = \frac{967}{881} = \frac{0,716}{0,653} = 1,09$; ...nts mécaniques, ou $m = 0,10$ du travail d'élévation ...ie. On peut d'ailleurs comparer les expériences ...sur le capu-mortuum, $m = 0,12$ et $m = 0,08$,

...00; Section ... 0.250 ... m² 0490

...que le m...

...une surfa... ...eur, en tournant à 559 tours; c'est-à-dire pour ...un courst... ...teur d'élévation statique $H_1 = \frac{11.70^2}{19.62} = 6^m95$; ...lle extérieure du tambour mobile de pompe.

...la série ...tuyaux, et la vanne A complètement fermée; la ...ment de ... ° 6/10 °, et après l'expérience, cette température ...lors des ... de 23 °

...60 = 4,8...

...pleur-Sain...

..., à enclen...

Les pr... prises... ces e... été r... les ré... obtenu... toute... press...

M...

Vcon...

Auto-Imp. L. Courtu...

